Veeltermen om hoeken in stukjes te delen.

Voetnoot bij het seminarium Geschiedenis van de Wiskunde

Maxim Hendriks, Maart 2006

In *Van den Circkel* gebruikt Ludolph van Ceulen veeltermvergelijkingen om uit $2\sin n\alpha$ de waarde van $2\sin\alpha$ te berekenen, waarbij $n \in \mathbb{N}$. Hij hoeft alleen een methode voor priemgetallen uit te werken, omdat het delen multiplicatief werkt: om een hoek in mn stukjes te delen kun je de hoek eerst in n stukjes delen en het resultaat vervolgens in m stukjes. Van Ceulen past de methode toe om de zijdes van regelmatige ingeschreven n-hoeken in een cirkel van straal 1 te berekenen voor $n = 3, 5, 7, 9, \ldots, 79$. Hij zegt de benodigde veeltermen van Adriaan van Roomen gekregen te hebben. Hoe die ze bedacht heeft, is vooralsnog een raadsel. We gaan deze veeltermen hieronder nader beschouwen.

We willen uitvogelen hoe we $y = 2\sin n\alpha$ kunnen uitdrukken in $x = 2\sin\alpha$. Voor even n blijkt er geen veeltermuitdrukking te bestaan, maar voor oneven n wel. Stel daarom $n = 2k+1$ met $k \geq 0$. Merk zometeen op hoe we dit al in de tweede en derde stap gebruiken. We vinden de veeltermen met de formule van De Moivre: $\cos(2k+1)\alpha + i\sin(2k+1)\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2k+1}$. Door het rechterlid uit te werken en imaginaire delen te nemen krijgen we:

$$
\begin{aligned}
\sin(2k+1)\alpha &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{2k+1}{2j+1} \sin^{2j+1}\alpha \cos^{(2k+1)-(2j+1)}\alpha \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{2k+1}{2j+1} \sin^{2j+1}\alpha (\cos^2\alpha)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{2k+1}{2j+1} \sin^{2j+1}\alpha (1-\sin^2\alpha)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left[(-1)^j \binom{2k+1}{2j+1} \sin^{2j+1}\alpha \sum_{l=0}^{k-j} (-1)^l \binom{k-j}{l} \sin^{2l}\alpha \right] \\
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{k-j} (-1)^{j+l} \binom{2k+1}{2j+1} \binom{k-j}{l} \sin^{2(j+l)+1}\alpha \\
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{l'=j}^{k} (-1)^{l'} \binom{2k+1}{2j+1} \binom{k-j}{l'-j} \sin^{2l'+1}\alpha,
\end{aligned}
$$

waarbij we in de laatste stap overschakelen naar de variabele $l' = l + j$. We merken nu op dat $\sin^{2m+1}\alpha$ precies voorkomt in die deelsommen over l' waarvoor $j \leq m$. Daarom kunnen we de vergelijking herschrijven als

$$\sin(2k+1)\alpha = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \left[\sum_{n=0}^{m} \binom{2k+1}{2n+1} \binom{k-n}{m-n} \right] \sin^{2m+1}\alpha.$$

Van Ceulen herschaalt nog met factoren 2. Dit levert hem de veeltermvergelijking

$$y = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \left[\frac{\sum_{n=0}^{m} \binom{2k+1}{2n+1}\binom{k-n}{m-n}}{2^{2m}} \right] x^{2m+1}.$$

We noemen de uitdrukking aan de rechterkant $P_{2k+1}(x)$. Zeer bijzonder is dat de veeltermen na het herschalen allemaal nog steeds gehele coëfficiënten blijken te hebben, ondanks dat zo'n coëfficiënt door een flink aantal factoren 2 gedeeld wordt. Van Ceulen noch een van zijn tijdgenoten heeft dit waarschijnlijk kunnen aantonen. Wij hebben deze mogelijkheid wel. Het volgt uit een gesloten uitdrukking voor $\sum_{n=0}^{m}\binom{2k+1}{2n+1}\binom{k-n}{m-n}$ voor alle $m \in \{0,\ldots,k\}$, die recent gevonden is in [3]. In [2] is van deze identiteit een generiek bewijs met hypergeometrische functies opgetekend. Het eindresultaat is

$$\sum_{n=0}^{m}\binom{2k+1}{2n+1}\binom{k-n}{m-n} = 2^{2m}\frac{2k+1}{2m+1}\binom{k+m}{2m} \quad (0 \leq m \leq k).$$

De rechterzijde hiervan is geheel — de linkerzijde immers ook — en daar $2m+1$ geen factor 2 bevat en $2k+1$ en $\binom{k+m}{2m}$ beide geheel zijn, volgt dat beide zijdes deelbaar zijn door 2^{2m} binnen $\mathbb{Z}$. De veelterm $P_{2k+1}(x)$ heeft dus daadwerkelijk gehele coëfficiënten en er geldt

$$P_{2k+1}(x) = \sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{2k+1}{2m+1}\binom{k+m}{2m}x^{2m+1}.$$

Uit de definities $y = 2\sin n\alpha$ en $x = 2\sin\alpha$ is bovendien direct duidelijk dat $y = 2\sin(n\arcsin(\frac{x}{2}))$. Blijkbaar is deze functie in x voor $n = 2k+1$ gelijk aan $P_{2k+1}(x)$. Dit betekent enerzijds dat de Taylorreeks van deze functie afbreekt, iets wat niet a priori te verwachten was. Anderzijds betekent het dat we de veeltermen $P_{2k+1}(x)$ kunnen vinden door de Taylorreeks van $2\sin(n\arcsin(\frac{x}{2}))$ tot en met de $(2k+1)$-de macht uit te rekenen. Dit kan eenvoudig met een paket zoals bijvoorbeeld MAPLE. We kunnen er natuurlijk ook voor kiezen om bovengenoemde expliciete uitdrukking voor P_{2k+1} te gebruiken. Zo komen we vlug tot de volgende tabel:

$2k+1$	Het polynoom $P_{2k+1}(x)$
1	x
3	$3x - x^3$
5	$5x - 5x^3 + x^5$
7	$7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$
9	$9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9$
11	$11x - 55x^3 + 77x^5 - 44x^7 + 11x^9 - x^{11}$
13	$13x - 91x^3 + 182x^5 - 156x^7 + 65x^9 - 13x^{11} + x^{13}$
15	$15x - 140x^3 + 378x^5 - 450x^7 + 275x^9 - 90x^{11} + 15x^{13} - x^{15}$
17	$17x - 204x^3 + 714x^5 - 1122x^7 + 935x^9 - 442x^{11} + 119x^{13} - 17x^{15} + x^{17}$
19	$19x - 285x^3 + 1254x^5 - 2508x^7 + 2717x^9 - 1729x^{11} + 665x^{13} - 152x^{15} +$ $+19x^{17} - x^{19}$
21	$21x - 385x^3 + 2079x^5 - 5148x^7 + 7007x^9 - 5733x^{11} + 2940x^{13} - 952x^{15} +$ $+189x^{17} - 21x^{19} + x^{21}$
23	$23x - 506x^3 + 3289x^5 - 9867x^7 + 16445x^9 - 16744x^{11} + 10948x^{13} - 4692x^{15} +$ $+1311x^{17} - 230x^{19} + 23x^{21} - x^{23}$
25	$25x - 650x^3 + 5005x^5 - 17875x^7 + 35750x^9 - 44200x^{11} + 35700x^{13} - 19380x^{15} +$ $+4125x^{17} - 1750x^{19} + 275x^{21} - 25x^{23} + x^{25}$

Voor even n kunnen we een vergelijkbare truc als boven uithalen en met behulp van de formule van De Moivre $\cos n\alpha$ als veelterm uit te drukken in $\sin\alpha$. Zij daarom $n = 2k$ met $k \geq 0$. We vinden

$$\cos 2k\alpha = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \left[\sum_{n=0}^{m} \binom{2k}{2n} \binom{k-n}{m-n} \right] \sin^{2m} \alpha.$$

Als we $y = 2\cos 2k\alpha$ en $x = 2\cos\alpha$ stellen, dan levert een herschaling van de vorige vergelijking ons

$$y = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \left[\frac{\sum_{n=0}^{m} \binom{2k}{2n} \binom{k-n}{m-n}}{2^{2m-1}} \right] x^{2m}$$

We noemen de veelterm aan de rechterzijde $P_{2k}(x)$. Ook ditmaal is de som binnen de haakjes te vinden in [3] en [2]. Er geldt

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{2k}{2n} \binom{k-n}{m-n} = 2^{2m-1} \frac{k}{m} \binom{k+m-1}{2m-1}$$

en daarom

$$P_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \frac{k}{m} \binom{k+m-1}{2m-1} x^{2m}.$$

Net zoals voor oneven n is het eenvoudig een tabel van $P_{2k}(x)$ te maken — al dan niet met de Taylorreeks van $2\cos(2k \arcsin(\frac{x}{2}))$.

$2k$	Het polynoom $P_{2k}(x)$
2	$2 - x^2$
4	$2 - 4x^2 + x^4$
6	$2 - 9x^2 + 6x^4 - x^6$
8	$2 - 16x^2 + 20x^4 - 8x^6 + x^8$
10	$2 - 25x^2 + 50x^4 - 35x^6 + 10x^8 - x^{10}$
12	$2 - 36x^2 + 105x^4 - 112x^6 + 54x^8 - 12x^{10} + x^{12}$
14	$2 - 49x^2 + 196x^4 - 294x^6 + 210x^8 - 77x^{10} + 14x^{12} - x^{14}$
16	$2 - 64x^2 + 336x^4 - 672x^6 + 660x^8 - 352x^{10} + 104x^{12} - 16x^{14} + x^{16}$
18	$2 - 81x^2 + 540x^4 - 1386x^6 + 1782x^8 - 1287x^{10} + 546x^{12} - 135x^{14} + 18x^{16} - x^{18}$
20	$2 - 100x^2 + 825x^4 - 2640x^6 + 4290x^8 - 4004x^{10} + 2275x^{12} - 800x^{14} + 170x^{16} -$ $-20x^{18} + x^{20}$
22	$2 - 121x^2 + 1210x^4 - 4719x^6 + 9438x^8 - 11011x^{10} + 8008x^{12} - 3740x^{14} + 1122x^{16} -$ $-209x^{18} + 22x^{20} - x^{22}$
24	$2 - 144x^2 + 1716x^4 - 8008x^6 + 19305x^8 - 27456x^{10} + 24752x^{12} - 14688x^{14} +$ $+5814x^{16} - 1520x^{18} + 252x^{20} - 24x^{22} + x^{24}$

Dat we hierboven beschreven twee families van veeltermen genummerd hebben zodat ze om en om gerangschikt zijn heeft een goede reden. Er is namelijk een eenvoudig verband tussen de twee families. Laten we om dit verband te zien de coëfficiënt bij x^m van de veelterm $P_n(x)$

de naam $c_{n,m}$ geven. We krijgen dan de volgende tabel van coëfficiënten:

$c_{n,m}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1									
2	2	0	−1								
3	0	3	0	−1							
4	2	0	−4	0	1						
5	0	5	0	−5	0	1					
6	2	0	−9	0	6	0	−1				
7	0	7	0	−14	0	7	0	−1			
8	2	0	−16	0	20	0	−8	0	1		
9	0	9	0	−30	0	27	0	−9	0	1	
10	2	0	−25	0	50	0	−35	0	10	0	−1

De eerste dingen die opvallen aan deze tabel zijn

$$c_{n,0} = \begin{cases} 0 & \text{als } k \text{ oneven} \\ 2 & \text{als } k \text{ even} \end{cases} \qquad c_{n,n} = \begin{cases} 1 & \text{als } k \equiv 0,1 \mod 4 \\ -1 & \text{als } k \equiv 2,3 \mod 4 \end{cases}$$

en dat $c_{n,m} = 0$ als $n-m$ oneven is: we zien een schaakbordpatroon van nullen en coëfficiënten die niet nul zijn. Dit volgt allemaal eenvoudig uit de gevonden uitdrukkingen voor $P_n(x)$. Als we nog iets beter kijken, zien we ook dat

$$c_{2n,m} = c_{2n-2,m} - c_{2n-1,m-1} \quad \text{en} \quad c_{2n+1,m} = c_{2n-1,m} + c_{2n,m-1}$$

mits $1 \leq m \leq n-2$. Deze laatste twee verbanden kunnen we compacter formuleren als $c_{n,m} = c_{n-2,m} + (-1)^{n-1} c_{n-1,m-1}$. Ook François Viète heeft dit verband al opgeschreven (zie [4]). Net zoals wij heeft hij dit gezien door een tabel te maken. We hebben nu echter nog niet aangetoond dat dit verband voor alle $c_{n,m}$ $(1 \leq m \leq n-2)$ geldt. Viète rept er met geen woord over. Daar hij nog geen binomiaalcoëfficiënten als instrument tot zijn beschikking had, mogen we wellicht aannemen dat hij dit verband ook niet hard kon maken. Voor ons is het nu echter eenvoudig te bewijzen met de boven gevonden expliciete uitdrukkingen voor de coëfficiënten $c_{n,m}$. In de even rijen valt aan te tonen dat $c_{2n,2m} = c_{2n-2,2m} - c_{2n-1,2m-1}$ voor $1 \leq 2m \leq n-2$. Deze vergelijking verandert na substitutie van de concrete waarden in

$$(-1)^m \frac{n}{m}\binom{n+m-1}{2m-1} = (-1)^m \frac{n-1}{m}\binom{n-1+m-1}{2m-1} - (-1)^{m-1}\frac{2n-1}{2m-1}\binom{n-1+m-1}{2m-2}.$$

Voor de oneven rijen is het voldoende te laten zien dat $c_{2n+1,2m+1} = c_{2n-1,2m+1} + c_{2n,2m}$ voor $1 \leq 2m+1 \leq n-2$. Dit verandert na substitutie in

$$(-1)^m \frac{2n+1}{2m+1}\binom{n+m}{2m} = (-1)^m \frac{2n-1}{2m+1}\binom{n-1+m}{2m} + (-1)^m \frac{n}{m}\binom{n+m-1}{2m-1}.$$

Beide identiteiten kunnen we met een beetje manipulatie zo verifiëren.

Als we de nu aangetoonde recurrente betrekking toepassen op hele tabelrijen tegelijk, vinden we direct een recurrente betrekking voor de hele veeltermen $P_n(x)$:

$$P_n(x) = P_{n-2}(x) + (-1)^{n-1} x P_{n-1}(x).$$

Aangezien Ludolph van Ceulen alleen de veeltermen $P_{2k+1}(x)$ had, heeft hij dit verband sowieso nooit kunnen zien. Uit onze recurrente betrekking volgt echter dat

$$\begin{aligned}
P_{2k+1}(x) &= P_{2k-1}(x) + xP_{2k}(x) \\
&= P_{2k-1}(x) + x(P_{2k-2}(x) - xP_{2k-1}(x) \\
&= (1-x^2)P_{2k-1}(x) + xP_{2k-2}(x) \\
&= (1-x^2)P_{2k-1}(x) + (P_{2k-1}(x) - P_{2k-3}(x) \\
&= (2-x^2)P_{2k-1}(x) - P_{2k-3}(x),
\end{aligned}$$

maar Van Ceulen zegt niets over deze betrekking tussen de $P_n(x)$ voor oneven n, die je met de eerste paar veeltermen $P_1(x), P_3(x), P_5(x)$ en $P_7(x)$ in de hand toch al vrij gemakkelijk ontdekt.

Merk verder nog op dat $P_{n(2k+1)}(x) = P_n(P_{2k+1}(x))$ voor alle $n, k \geq 0$. Voor oneven n was dit al te verwachten door de multiplicatieve eigenschap die we aan het begin noemden, maar het is ook voor even n duidelijk, want het volgt direct door in $2\cos(n \arcsin(\frac{x}{2}))$ voor x de uitdrukking $2\sin((2k+1)\arcsin(\frac{x}{2}))$ in te vullen. Voor even n vinden we $P_{2k+1}(P_n(x)) = 2\sin((2k+1)\arcsin(\cos(n\arcsin(\frac{x}{2}))))$.

Referenties

[1] Ceulen, Ludolph van (1595), *Van den Circkel*, Leiden: I. van Colster.

[2] Hirschhorn, Mike (2003), Some binomial coefficient identities, *Mathematical Gazette* 87 (juli), pp. 288–291. (verkrijgbaar via http://web.maths.unsw.edu.au/∼mikeh/)

[3] Rzadkowski, Grzegorz (2001), On identities following from trigonometric formulae of multiple angles, *Mathematical Gazette* 85 (juli), pp. 289–293.

[4] Viète, François (1600), The analytic art.