Van den cirkel, wortels en π.

Waarin geleerd wordt te benaderen in veel decimalen

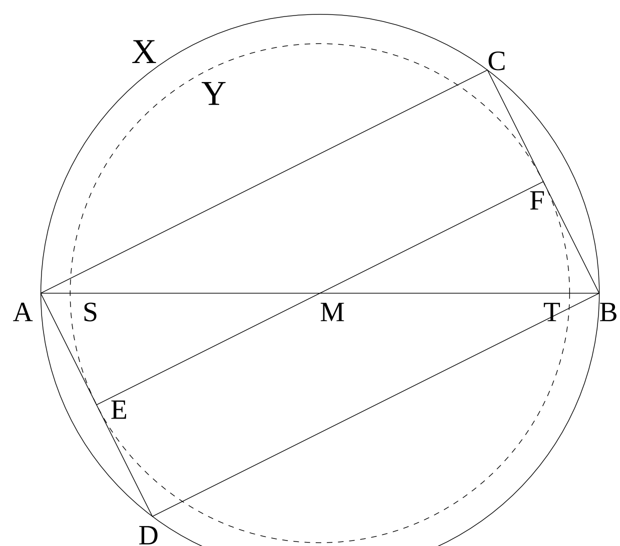
Inga Deimen, Maxim Hendriks en Matthijs Pronk

16–06–2006

De omgeschreven en ingeschreven veelhoekszijde

In Capittel IX van zijn boek *Van den Circkel* [2] werkt Ludolph van Ceulen met regelmatige om- en in een cirkel geschreven veelhoeken. Hij legt uit hoe hij de zijdelengte van een regelmatige omgeschreven n-hoek berekent uit de zijdelengte van een regelmatige ingeschreven n-hoek. Dit gebruikt hij later bij zijn benaderingen van π.

Voor het gemak noemen we de regelmatige ingeschreven n-hoekszijde i_n en de regelmatige omgeschreven n-hoekszijde o_n. We nemen ook aan (net zoals Van Ceulen) dat de diameter van cirkel gelijk is aan 2.



Figuur 1: Voor het berekenen van o_n gebruikt Van Ceulen de gestippelde cirkel Y.

Voor het berekenen van de zijde van een regelmatige omgeschreven n-hoek gebruiken we Figuur 1. Beschouw cirkel X met diameter $AB = 2$, middelpunt M en een zijde BC van een regelmatige ingeschreven n-hoek. We noemen AC het complement van zijde BC. Nu construeren we een kleinere cirkel Y concentrisch met X, zodanig dat BC raakt aan Y. Tevens is BC dan de zijde van een regelmatige aan Y omgeschreven n-hoek.

We roteren de zijde BC om M over 180° zodat we lijnstuk AD krijgen. Aangezien AD en BC dan beiden in hun middelpunten E en F aan de cirkel Y raken, geldt dat het lijnstuk EF door M gaat en dus een diameter van Y is. Bovendien is EF even lang als het complement AC.

Er volgt uit Pythagoras dat zijde AC gelijk is aan $\sqrt{4-i_n^2}$. Dit betekent dat de diameter van cirkel Y ook gelijk is aan $\sqrt{4-i_n^2}$. Wat Van Ceulen vervolgens doet is de cirkel Y vergroten tot cirkel X om te zien wat er gebeurt met de lengte van zijde BC, als deze wordt meevergroot. We kunnen een kruistabel voor de lengtes opstellen:

2	$\sqrt{4-{i_n}^2}$
o_n	i_n

Immers, $i_n = BC$ is de lengte van een regelmatige omgeschreven n-hoekszijde om een cirkel met straal $\sqrt{4-{i_n}^2}$. Er volgt dat

$$o_n = \frac{2i_n}{\sqrt{4-i_n^2}}.$$

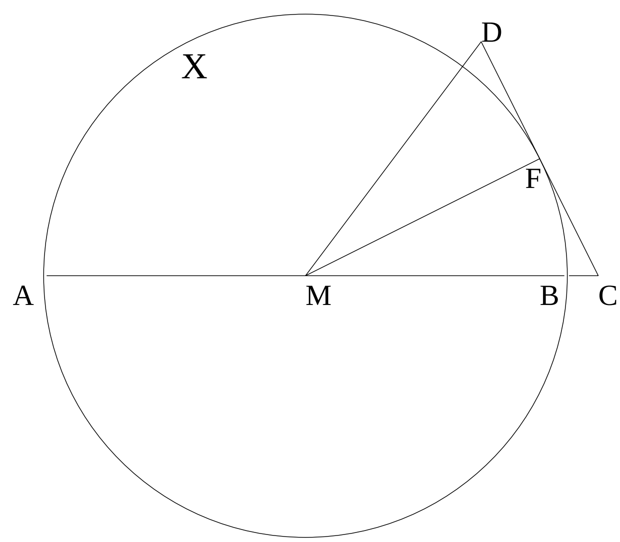
Onder- en bovengrenzen voor π

Dankzij de uitdrukking van o_n als functie van i_n kunnen we nu aan de benadering van π beginnen. Als eerste de benadering van onder.

Aangezien de omtrek van cirkel X gelijk is aan 2π, en de halve omtrek dus gelijk is aan π, kunnen we het getal π van onderen benaderen door de regelmatige n-hoekszijde te vermenigvuldigen met $\frac{n}{2}$. Er geldt dus

$$\frac{1}{2}n \cdot i_n < \pi$$

Opmerkelijk is dat Ludolph de benadering van boven niet met behulp van de omtrek van cirkel X doet, maar met de inhoud van cirkel X. Dit staat expliciet aangegeven in Capittel IX. De uiteindelijke formule wordt echter identiek aan de formule die we zouden krijgen wanneer we het wel met behulp van de omtrek doen.



Figuur 2: Cirkel voor het berekenen van een bovengrens van π

Het idee is als volgt: deel de inhoud van de regelmatige omgeschreven n-hoek op in driehoeken. Eén zo'n driehoek is te zien in Figuur 2. De oppervlakte van een driehoek is gelijk aan $\frac{1}{2}CD \cdot MF = \frac{1}{2}o_n$. Aangezien er n van zulke driehoek zijn, krijgen we de benadering

$$\frac{1}{2}n \cdot i_n < \pi < \frac{1}{2}n \cdot o_n = \frac{n \cdot i_n}{\sqrt{4 - i_n^2}}$$

Families van veelhoeken

Aan het begin van Capittel X past Van Ceulen de in Capittel IX uitgelegde formules toe op de 60-hoek. Verder berekent hij symbolische uitdrukkingen voor de zijdes i_n van vier oneindige families van ingeschreven n-hoeken. Deze families worden gevormd een aantal zijdes dat van de vorm $\{2^k \cdot n_0 : k \geq 0\}$ is, met n_0 respectievelijk 3, 4, 5 en 60. De gevonden uitdrukkingen schrijft hij in tabellen op (folio 9 verso onderaan tot en met folio 11 recto bovenaan). Wij hebben deze tabellen in verkorte vorm opgenomen, omdat het patroon erin duidelijk is:

n	i_n
3	$\surd 3$
$2 \cdot 3$	1
$2^2 \cdot 3$	$\surd.2 - \surd 3$
$2^3 \cdot 3$	$\surd.2 - \surd.2 + \surd 3$
$\vdots$	$\vdots$
$2^k \cdot 3$	$\underbrace{\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \ldots + \surd.2}_{k-1 \text{ maal } \surd.2} + \surd 3$

n	i_n
5	$\surd.2\frac{1}{2} - \surd 1\frac{1}{4}$
$2 \cdot 5$	$\surd.1\frac{1}{6} - \surd 1\frac{1}{2}$
$2^2 \cdot 5$	$\surd.2 - \surd.2\frac{1}{2} + \surd 1\frac{1}{4}$
$2^3 \cdot 5$	$\surd.2 - \surd.2 + \surd.2\frac{1}{2} + \surd 1\frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$
$2^k \cdot 5$	$\underbrace{\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \ldots + \surd.2}_{k-1 \text{ maal } \surd.2} + \surd.2\frac{1}{2} + \surd 1\frac{1}{4}$

n	i_n
4	$\surd 2$
$2 \cdot 4$	$\surd.2 - \surd 2$
$2^2 \cdot 4$	$\surd.2 - \surd.2 + \surd 2$
$2^3 \cdot 4$	$\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd 2$
$\vdots$	$\vdots$
$2^k \cdot 4$	$\underbrace{\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \ldots + \surd.2 + \surd 2}_{k+1 \text{ maal } \surd.2}$

n	i_n
60	$\surd.2 - \surd.1\frac{3}{4} + \surd\frac{5}{16} + \surd.1\frac{7}{8} + \surd\frac{45}{64}. =: \surd.2 - p$
$2 \cdot 60$	$\surd.2 - \surd.2 + p$
$2^2 \cdot 60$	$\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + p$
$2^3 \cdot 60$	$\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + p$
$\vdots$	$\vdots$
$2^k \cdot 60$	$\underbrace{\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \ldots + \surd.2 + \surd 2}_{k+1 \text{ maal } \surd.2} + p$

In de eerste tabel (linksboven) eindigt Van Ceulen bij $k = 27$ en komt dus tot de zijde van een ingeschreven 402653184-hoek. De tweede tabel (linksonder) zet hij voort tot $k = 25$ en daarmee tot $i_{134217728}$. Hierna (rechtsboven) stopt hij bij $k = 25$ en heeft dus de zijde van een ingeschreven 167772160-hoek te pakken. In de laatste tabel (rechtsonder) gaat hij van een 60-hoek uit en geeft dan de formules tot en met $i_{8053063680}$ (dus $k = 27$). We zullen zien dat hij in het volgende Capittel nog twee stappen verder gaat in deze familie, tot $k = 29$.

Bij i_{60} kan zijn notatie voor radicaaluitdrukkingen (met de punt onder het wortelteken) enige verwarring opwekken. We schrijven daarom i_{60} uit in moderne notatie. Wij zouden dit getal als

$$\sqrt{2-\sqrt{1\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{5}{16}}+\sqrt{1\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{45}{64}}}}}$$

weergeven. Hij gebruikt ook nog een punt aan het einde van de hele uitdrukking, volgens ons om aan te geven dat daar alle wortels 'sluiten', maar het blijft ambigu.

Hij verklaart de formules voor de veelhoekszijdes in bovenstaande families overigens alleen met een verwijzing naar Capittel III–V. Daarin staat het verband tussen i_n en i_{2n} uitgelegd voor het geval dat n in een van de voornoemde families zit.

Op naar de negentien decimalen

In Capittel XI (strekkend van folio 11 recto tot en met 14 recto) geeft Ludolph voor een aantal zijdes i_n van ingeschreven veelhoeken een nauwkeurige rationale benadering. Om precies te zijn: hij neemt uit elke familie van Capittel X één veelhoek met veel zijden:

Familie van veelhoeken	Rekenvoorbeeld van Ludolph	Folio
$2^k \cdot 5$	$167772160 = 2^{25} \cdot 5$	11 recto—12 recto
$2^k \cdot 4$	$1073741824 = 2^{28} \cdot 4$	12 recto—12 verso
$2^k \cdot 3$	$6442450944 = 2^{31} \cdot 3$	13 recto—13 recto
$2^k \cdot 60$	$32212254720 = 2^{29} \cdot 60$	13 recto—14 recto

In Capittel X hebben we de lengtes van deze veelhoekszijdes gezien als worteluitdrukkingen. Van Ceulen berekent stap voor stap benaderingen van deeluitdrukkingen hiervan, werkend van de binnenste naar de buitenste wortel. Hij heeft deze tussenstappen in grote tabellen laten afdrukken, maar niet duidelijk vermeld wat hij in de tabellen heeft opgetekend. Dat verdient dus enige uitleg.

Het is belangrijk op te merken dat hij begint met het uitrekenen van een of meerdere wortels die bij alle leden van een familie voorkomen afgezien van de eerste paar. Ze zijn specifiek voor de familie waaruit de veelhoek komt en we gaan ze daarom even langs. Vergelijk de tabellen van families veelhoeken in de vorige paragraaf.

- Bij de familie $2^k \cdot 5$ is dit $\sqrt{.2\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}}$. We zien daarom in de eerste regel van de tabel op folio 11 verso een benadering van $\sqrt{1\frac{1}{4}} \approx 1,118$ staan. Op de tweede regel staat een benadering van $\sqrt{.2\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}} \approx 1,902$.
- Bij de familie $2^k \cdot 4$ is dit niet van toepassing. (De tabel staat op folio 12 verso.)
- Bij de familie $2^k \cdot 3$ gebruikt Van Ceulen de gelijkheid $\sqrt{.2+\sqrt{3}} = \sqrt{1\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$. Waarschijnlijk vond hij het makkelijk dat er zo één wortel minder genest was. De eerste regel van de tabel bovenaan folio 13 recto is daarom een benadering van $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,707$ en de tweede regel een benadering van $\sqrt{1\frac{1}{2}} \approx 1,224$.

- Bij de familie $2^k \cdot 60$ is bovengenoemde $p = \sqrt{1\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{5}{16}} + \sqrt{1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}}}$ de startwaarde. We vinden daarom in de eerste vier regels van de tabel onderaan folio 13 recto respectievelijk de volgende benaderingen: $\sqrt{\frac{45}{64}} \approx 0,8385$, $\sqrt{.1\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}} \approx 1,647$, $\sqrt{\frac{5}{16}} \approx 0,559$ en $p \approx 1,989$.

Na deze beginstukjes zet Van Ceulen de tabellen voort volgens het stramien "regel(n) = $\sqrt{2 + \text{regel}(n-1)}$". Hierdoor komen we stapje voor stapje bij de waarde uit die we willen berekenen. Intussen komen we echter ook een grote rij complementen van zijdes i_n aan de weet; dat zijn precies de berekende deeluitdrukkingen.

Als Van Ceulen eenmaal complement($i_{n/2}$) heeft berekend, is zijn laatste rekenstap $i_n = \sqrt{2 - \text{complement}(i_{n/2})}$. Deze uitkomst schrijft hij niet meer in de tabel. Daarin gaat hij juist nog één extra stap door met het berekenen van complementen. Dit lijkt meer werk dan nodig, maar daarvoor heeft hij een goede reden. Met de in Capittel IX beschreven formule kan hij namelijk o_n berekenen uit i_n en complement(i_n).

Door de gevonden waarden van i_n en o_n met $n/2$ te vermenigvuldigen verkrijgt Ludolph onder- en bovenafschattingen voor π, zoals uitgelegd in Capittel IX. We vermelden alleen zijn nauwkeurigste benadering. Dat is die voor de $60 \cdot 2^{29}$-hoek. Hij berekent op folio 13 verso

$$\text{complement}(i_{60\cdot 2^{28}}) = 1,9999999999999999999619532567707250542960\mathbf{0998}$$

(de vetgedrukte cijfers hadden 1006 moeten zijn) en dus

$$\begin{aligned} i_{60\cdot 2^{29}} &= \sqrt{2 - 1,9999999999999999999619532567707250542960\mathbf{0998}} \\ &= 0.00000000019505574390228795747\mathbf{294892}. \end{aligned}$$

(de vetgedrukte cijfers hadden 320248 moeten zijn) en

$$o_{60\cdot 2^{29}} = 0,00000000019505574390228795747\mathbf{387661}$$

(de vetgedrukte cijfers hadden 438805 moeten zijn). Ludolph krijgt met zijn waarden de volgende correcte afschattingen en daardoor een benadering van π in 19 decimalen (merk op dat de 20^{e} decimaal nog een 5 of een 6 kan zijn):

$$3\frac{14159265358979323845}{100000000000000000000} < \pi < 3\frac{14159265358979323847}{100000000000000000000}.$$

De methode van Snellius

Hier een stukje over de methode om π te benaderen van Snellius, een tijdgenoot van Van Ceulen. We laten zien dat Ludolph met zijn wetenschap twee keer zo veel decimalen van π had kunnen berekenen als hij een slimme truc had gebruikt. De informatie in deze paragraaf komt uit [1]. Snellius gebruikt niet de i_n en o_n zoals Ludolph van Ceulen, maar P_n en Q_n die gedefinieerd worden door

$$Q_n := n \tan \frac{\pi}{n}, \qquad P_n := n \sin \frac{\pi}{n}$$

Er geldt dat $P_n = \frac{n}{2} \cdot i_n$ en $Q_n = \frac{n}{2} \cdot o_n$. Deze getallen convergeren dus naar π voor $n \to \infty$ en geven ondergrenzen respectievelijk bovengrenzen. Met goniometrische verdubbelingsfuncties kunnen we laten zien dat

$$Q_{2n} = \frac{2P_nQ_n}{P_n + Q_n}, \qquad P_{2n} = \sqrt{P_nQ_{2n}}$$

en wel als volgt: zet van tevoren $x = \frac{\pi}{2n}$, dan geldt:

$$\begin{aligned}
Q_{2n} &= 2n \tan x = 2n \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= 2n \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} = n \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{2n \sin 2x}{\cos 2x + 1} \cdot \frac{n \sin 2x}{n \sin 2x} = \frac{2n^2 \sin^2 2x}{n \sin 2x \cos 2x + n \sin 2x} \\
&= \frac{\left(\frac{2n^2 \sin^2 2x}{\cos 2x}\right)}{\left(\frac{n \sin 2x \cos 2x + n \sin 2x}{\cos 2x}\right)} = \frac{\left(2n^2 \sin 2x \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)}{\left(n \sin 2x + n \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)} \\
&= \frac{2n^2 \sin 2x \tan 2x}{n \sin 2x + n \tan 2x} \\
&= \frac{2P_nQ_n}{P_n + Q_n}
\end{aligned}$$

En voor de andere formule:

$$\begin{aligned}
P_{2n}^2 &= 4n^2 \sin^2 x = \frac{2n^2 \cdot 2 \sin^2 x \cos x}{\cos x} \\
&= \frac{2n^2 \sin 2x \sin x}{\cos x} \\
&= P_nQ_{2n}
\end{aligned}$$

Dus volgt:

$$P_{2n} = \sqrt{P_nQ_2n}$$

Met behulp van de twee formules zouden we kunnen beginnen met Q_6 en P_6, en daaruit Q_{96} en P_{96} kunnen berekenen, waarmee we Archimedes' resultaat uit de Klassieke Oudheid zouden evenaren. We moeten hierbij opmerken dat volgens [1] Ludolph van Ceulen deze manier gebruikte om π te benaderen. Dit is niet geheel correct, zoals we al gezien hebben. Er geldt dat $Q_n = \frac{n}{2} \cdot o_n$ en $P_n = \frac{n}{2} \cdot i_n$, dus Ludolph verkreeg de waarden wel. Hij gebruikte echter niet de zojuist afgeleide verdubbelingsformules.

Om nu uit Q_n en P_n op eenvoudige wijze een betere benadering van π te krijgen, schrijven we hun Taylor-reeksen uit:

$$\begin{aligned} Q_n &= n\left(\frac{\pi}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{n}\right)^5 + \dots\right) \\ &= \pi + \frac{1}{3}\frac{\pi^3}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \\ P_n &= n\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{n}\right)^5 - \dots\right) \\ &= \pi - \frac{1}{6}\frac{\pi^3}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $Q_n - \pi$ en $P_n - \pi$ beide van orde $\frac{1}{n^2}$ zijn. Oftewel Q_n en P_n hebben beide een fout van orde $\frac{1}{n^2}$. Merk nu op dat

$$\frac{1}{3}Q_n + \frac{2}{3}P_n = \pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Deze uitdrukking convergeert dus veel sneller naar π dan Q_n en P_n apart. Dit geeft in decimalen zelfs een twee keer zo goede benadering. Hieronder zien we dit voor $n = 96$, waarbij de vetgedrukte decimalen niet meer (met zekerheid) correct zijn:

$$\begin{aligned} P_{96} &= 3.141\mathbf{031950} \\ Q_{96} &= 3.14\mathbf{2714599} \\ \frac{1}{3}Q_{96} + \frac{2}{3}P_{96} &= 3.141592\mathbf{834} \\ \pi &= 3.141592654\dots \end{aligned}$$

Worteltrekken

In het hieronderstaande kadertje staat het algoritme voor worteltrekken dat van Ceulen gebruikt heeft. Met dit algoritme heeft hij wortels zeer precies kunnen berekenen:

Worteltrek-algoritme voor een klein geheel getal n

$k := 0$
$b_k :=$ het grootste getal uit $\{m : m^2 \leq n\}$
$r_k := n - b_k^2$
herhaal (zolang je wilt) **{**
    $d_{k+1} :=$ het grootste getal in $\{0, \dots, 9\}$ waarvoor $(20b_k + d_{k+1})d_{k+1} \leq 100r_k$
    $r_{k+1} := 100r_k - (20b_k + d_{k+1})d_{k+1}$
    $b_{k+1} := 10b_k + d_{k+1}$
    $k := k + 1$
}
Zet een komma 'tussen b_0 en d_1' in b_{k+1}.

Het nuttige aan dit algoritme is dat je altijd verder kan rekenen om de al berekende benadering te verbeteren. Ieder uitvoeren van de “herhaling” geeft één decimaal meer in de benadering. In het algoritme wordt de rij benaderingen met b_k aangeduid. De k-de decimaal is d_k en ook werken we nog met een rest r_k. Om het algoritme te verduidelijken geven we een voorbeeld voor hoe je dit op papier zou kunnen uitwerken. We proberen $\sqrt{5}$ in vier decimalen te benaderen:

$500\,0000\,00\,00$		(d_k vet gedrukt)	$b_0 = 2$
-4		$\downarrow$	
$100 = 100r_1$	$20 \cdot 2 = 40$	$\mathbf{2}(40 + \mathbf{2}) = 84$	
-84		$3(40 + 3) > 100$	$b_1 = 22$
$1600 = 100r_2$	$20 \cdot 22 = 440$	$\mathbf{3}(440 + \mathbf{3}) = 1329$	
-1329		$4(440 + 4) > 1600$	$b_2 = 223$
$27100 = 100r_3$	$20 \cdot 223 = 4460$	$\mathbf{6}(4460 + \mathbf{6}) = 26796$	
-26796		$7(4460 + 7) > 27100$	$b_3 = 2236$
$30400 = 100r_4$	$20 \cdot 2236 = 44720$	$\mathbf{0}(44720 + \mathbf{0}) = 0$	
-0		$1(44720 + 1) > 30400$	$b_4 = 22360$
$3040000 = 100r_5$	etc.		

We plaatsen de komma in 22360 en vinden $\sqrt{5} = 2,2360\ldots$

Het bewijs dat dit algoritme werkt is niet moeilijk. Allereerst moeten we denken in natuurlijke getallen in plaats van reële benaderingen. Neem het volgende voorbeeld in gedachten: stel dat x een benadering van $\sqrt{n}$ in 20 decimalen is (met verder dus alle decimalen gelijk aan nul). Dan is $10^{20} \cdot x$ een geheel getal. Niet alleen dat, het is bovendien het grootste gehele getal waarvan het kwadraat $\leq 10^{40} \cdot n$. Uit dit voorbeeld wordt duidelijk dat we steeds nauwkeurigere benaderingen van n kunnen vinden door achtereenvolgens $n, 100n, 10000n, \ldots, 10^{2k}n =: x_k$ te beschouwen en dan telkens het grootste getal b_k te zoeken waarvan het kwadraat nog kleiner of gelijk aan x_k is. Zo gedefinieerd is dan $10^{-k}b_k$ de benadering van $\sqrt{n}$ in k decimalen.

Dit verklaart meteen het begin van het algoritme. We proberen eerst het grootste getal m te vinden zo, dat $m^2 \leq n$. Dat is onze b_0 (de benadering in nul decimalen).

Gegeven dat we b_k kennen, hoe komen we dan b_{k+1} aan de weet? We zoeken op dat moment het grootste getal waarvan het kwadraat $\leq 10^{2(k+1)}n$ is. We weten nu echter al dat

$$b_k^2 \leq 10^{2k}n < (b_k + 1)^2$$

en dus

$$(10b_k)^2 = 100b_k^2 \leq 10^{2(k+1)}n < 100(b_k + 1)^2 = (10b_k + 10)^2.$$

Er is dus een getal $d_{k+1} \in \{0, \ldots, 9\}$ waarvoor

$$(10b_k + d_{k+1})^2 \leq 10^{2(k+1)}n < (10b_k + (d_{k+1} + 1))^2.$$

Het getal $10b_k+d_{k+1}$ is dan onze nieuwe benadering b_{k+1}. Denk nog even aan het algoritme. We zien deze globale voortgang duidelijk terug. Werken we de laatste ongelijkheden uit, dan vinden we

$$100b_k^2 + 20b_kd_{k+1} + d_{k+1}^2 \leq 100 \cdot 10^{2k}n < 100b_k^2 + 20b_k(d_{k+1}+1) + (d_{k+1}+1)^2$$

oftewel

$$(20b_k + d_{k+1})d_{k+1} \leq 100(10^{2k}n - b_k^2) < (20b_k + (d_{k+1}+1))(d_{k+1}+1).$$

Dit betekent dat we het grootste getal $d_{k+1} \in \{0, \ldots, 9\}$ zoeken waarvoor geldt

$$(20b_k + d_{k+1})d_{k+1} \leq 100(x_k - b_k^2).$$

Het enige nog op te helderen punt is dat we $(20b_k + d_{k+1})d_{k+1}$ in het algoritme steeds vergelijken met $100r_k$. Geldt er wel dat $r_k = x_k - b_k^2$?

Voor $k = 0$ (dus op het moment dat we de lus voor het eerst doorlopen) is dit duidelijk, daar dan $r_0 = n - b_0^2$ per definitie. Dat het voor alle $k \geq 0$ geldt volgt nu met volledige inductie. Stel namelijk dat de bewering voor k geldt. Dan volgt

$$\begin{aligned}
r_{k+1} &= 100r_k - (20b_k + d_{k+1})d_{k+1} \\
&= 100(x_k - b_k^2) - 20b_kd_{k+1} - d_{k+1}^2 \\
&= x_{k+1} - (100b_k^2 + 20b_kd_{k+1} + d_{k+1}^2 \\
&= x_{k+1} - (10b_k + d_{k+1})^2 \\
&= x_{k+1} - b_{k+1}^2
\end{aligned}$$

en geldt de bewering ook voor $k+1$. Terugblikkend op het algoritme is nu duidelijk dat het werkt.

Oefening. Bepaal zelf $\sqrt{37}$ in een flink aantal decimalen. Ter controle mag je daarna je "zakludolph" (rekenmachine) gebruiken.

Referenties

[1] Beukers, Frits en Reinboud, Weia (2002), Snellius versneld, *Nieuw Archief voor Wiskunde* juni, pp. 60–63.

[2] Ceulen, Ludolph van (1596), *Van den Circkel*, Delft: Jan Andrieszoon.