R.W. Runhardt

De Interestrekeninghe van Ludolf van Ceulen

Bachelorscriptie, 5 juni 2009

Scriptiebegeleider: prof.dr. J.P. Hogendijk

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Korte geschiedenis van de interestrekening

Al vanaf de tijd van de Babyloniërs heeft de mens interest gerekend over leningen. Een schuldeiser maakte door het rekenen van interest winst op zijn leningen; deze winst werd veelal gezien als een schadevergoeding van de schuldenaar voor de schuldeiser. Er waren verschillende manieren om interest te rekenen. Zo verschilde het interesttarief per situatie, van een vast percentage voor de gehele termijn tot een interest die zich van jaar tot jaar opstapelde. Vaak ook werd dit tarief wettelijk vastgesteld. (Tropfke, 539)

In de middeleeuwen echter werd, in navolging van geschriften door onder andere Augustinus, het rekenen van interest bestempeld als een hoofdzonde (hebzucht). Dit had tot gevolg dat het rekenen van interest tot in het begin van de 16e eeuw zou worden bestraft met excommunicatie. De dagelijkse praktijk zag er echter heel anders uit: door de economische bloei in Italië gedurende de 14e en 15e eeuw en die in Duitsland in de 16e eeuw was het gebruikelijk een koopmanskrediet af te sluiten: een starterslening om een bedrijf mee op te richten of uit te breiden. Men omzeilde de kerkelijke voorschriften door het uitvinden van allerhande rechts- en bedrijfsvormen. Zelfs de Kerk schreef leningen uit, de zogenaamde *montes pietatis* voor de armen, en het kwam vaak voor dat de Paus leningen afsloot bij rijke particulieren of banken. In Duitsland werd, in navolging van Engelse regels, het rekenen van interest tenslotte goedgekeurd tot een rentepercentage van 5% in een aantal rijksverordeningen van 1530, 1548 en 1577. Uiteindelijk werd in 1654 het verbod op interestrekening geheel opgeheven. (Tropfke, 539-540)

1.2 Interestrekening beschreven

Toch was het in de middeleeuwen al dat er voor het eerst werd geschreven over de methode om interest voor specifieke situaties te berekenen. Men hield zich vanaf dat moment ook op papier bezig met het berekenen van de interest over een lening tegen een bepaald interesttarief en voor een bepaalde termijn. De theorie van interestrekening die beschreven werd noemen we ook wel de *interestrekening.*(Tropfke, 539)

Het centrum van deze acitiviteit was Italië. Later begonnen ook Duitse en Nederlandse wiskundigen en rekenmeesters zich bezig te houden met de theorie. In Italiaanse en Duitse rekenboeken uit de middeleeuwen vinden we onder andere veel interestberekeningen bij Leonardo van Pisa (beter bekend als Fibonacci), Cardano, Luca Pacioli, Pegolotti, Ries en Widmans. In Nederland schreven onder andere Simon Stevin en Ludolph van Ceulen over interestrekening. De problemen die deze auteurs behandelden zijn bijvoorbeeld de berekening van het banksaldo op een eindtermijn en de berekening van een jaarlijkse termijn bij het aflossen van een lening gedurende een vast aantal jaren. Ook werden er, voor de berekeningen in samengestelde interest[1], tabellen opgesteld die snel het eindbedrag zouden geven. De oudste bekende tabellen van die soort zijn opgesteld door Pegolotti in 'La pratica della mercatura' in 1340. In 1582 verscheen het eerste gedrukte werk dat zulke tabellen bevatte: het boek 'van Interest, midtsgaders de constructie der selver' door Simon Stevin. Ook de Nederlander Martinus Wentsel schreef al voor 1600 een werk dat interesttabellen bevatte, de "Proportionale Ghesolveerde Tafelen van Interest" (Tropfke, 539-540, 544; Sarton, 247-249; Waller Zeper, 38-39)

1.3 Ludolf van Ceulen en de interestrekening

Ook de Nederlandse rekenmeester Ludolf van Ceulen schreef een werk over interestrekening. Dit werd gedrukt als een bijlage voor het boek 'Vanden Circkel' en was getiteld 'de Interestrekeninghe'. Het werk bevat zowel interestberekeningen voor simpele en samengestelde interest als tabellen voor de samengestelde interestrekening. Over dit werk is nog slechts weinig bekend; Van Ceulen is voornamelijk bekend geworden door zijn bepaling van π tot op 35 decimalen nauwkeurig.

Toch is ook zijn werk in de interestrekening de moeite van het lezen waard. De tabellen van Van Ceulen hebben, net zoals die van Wentsel en Stevin, "hun eigen cachet, wat nu niet van de tafels na 1600 verschenen gezegd kan worden," aldus Waller Zeper (Waller Zeper, 40). Er blijkt onder andere dat de tabellen die het werk van Van Ceulen bevat uitgebreider en van grotere significantie zijn dan die uit het werk van Stevin[2]. Ook loste Van Ceulen een aantal problemen op waar zijn voorgangers Wentsel en Stevin moeite mee hadden. (Waller Zeper, 80)

Van Ceulen zelf merkt op dat het werk ontstaan is als een verzameling van gedurende dertig jaar ontwikkeld werk. 'De Interestrekeninghe' is gericht aan de stadsbestuurders van Leiden uit dank voor het tot de stad toelaten van Van Ceulen en zijn gezin en het toewijzen van een school. Toch is het in de eerste

[1] Wanneer er interest over de nog te betalen interest van voorgaande jaren gerekend wordt, spreken we van *samengestelde interest.*

[2] Zie ook het hoofdstuk Tabellen voor een uitgebreide toelichting

plaats opgebouwd als een lesboek voor iedereen die de interestrekening machtig wil worden. Zo geeft Van Ceulen definities uit de interestrekening en uitgebreide uitwerkingen van zijn voorbeelden; ook licht hij toe hoe hij de interesttabellen voor samengestelde interest gemaakt heeft. In de komende hoofdstukken zal een toelichting volgen van de structuur van het werk, de voorbeelden die Van Ceulen geeft en de tabellen die hij heeft opgesteld. Daarvoor is het echter nuttig een korte biografie van Van Ceulen in het achterhoofd te houden.

1.3.1 Een korte biografie

Ludolph van Ceulen werd (vermoedelijk) op 28 januari 1540 geboren in de Duitse stad Hildesheim. Naar aanleiding van een opmerking in de inleiding van het door hemzelf geschreven werk 'Vanden Circkel' kunnen we er vanuit gaan dat hij al vanaf 1566 rekenmeester was. Rekenmeesters waren in die tijd niet academisch geschoold en dit gold ook voor Van Ceulen. We weten dat Van Ceulen onder andere in Keulen en Antwerpen gewoond heeft; tot 1578 weet men echter weinig zeker over zijn leven.

Rond 1576 verhuisde Van Ceulen naar Delft, waar hij de kost zou gaan verdienen als rekenmeester en later ook als schermmeester. In 1580 kreeg hij toestemming om een schermschool te openen in diezelfde stad. In 1593 of 1594 verhuisde Van Ceulen met zijn gezin van Delft naar Leiden. Ook in Leiden kreeg hij toestemming om een schermschool te openen. De bestuurders van de stad wezen hem de (voormalige) Faliedenbegijnkerk aan het Rapenburg toe als locatie voor de school. Van Ceulen zou vanaf dat moment hier niet alleen schermlessen maar ook rekenlessen gaan geven.

Als rekenmeester schreef Van Ceulen het werk 'Vanden Cirkcel', dat in 1596 verscheen. Hierin bepaalde hij een onder- en bovengrens voor π die pas vanaf de 35e decimaal verschilden. Ook nam Van Ceulen vanaf 1598 in zijn rol als rekenmeester zitting in een aantal commissies, onder andere voor het bestuderen van octrooiaanvragen en later ook voor het onderzoek naar belastingen en interest. Vanaf 1600 werd hij aangesteld als hoogleraar aan de Ingenieursschool van de Leidse Universiteit.

Ludolph van Ceulen overleed op 31 december 1610.

Hoofdstuk 2

'De Interestrekeninghe'

2.1 Structuur

'De Interestrekeninghe' heeft een duidelijke structuur. Het begint met twee inleidingen, waarvan één een aantal definities uit de interestrekening bevat. De romp van de tekst bestaat uit een groot aantal voorbeelden van toenemende moeilijkheidsgraad en een dertigtal interesttabellen, voorzien van een beschrijving. Ludolph van Ceulen begint de romp met voorbeelden waarin geen gebruik van de tabellen wordt gemaakt, introduceert dan de tabellen en geeft dan een aantal voorbeelden waarin de tabellen direct worden toegepast. De voorbeelden en tabellen zullen in de volgende hoofdstukken worden behandeld.

In de inleidingen van 'de Interestrekeninghe' richt Van Ceulen zich tot respectievelijk de bestuurders van Leiden en de lezer van het werk. In de tekst die geschreven is aan de bestuurders wordt ingegaan op het doel van de tekst en de motivatie voor het publiceren. Een volledige hertaling van deze inleiding is te vinden in de appendix.

2.2 Motivatie

In de eerste inleiding valt te lezen hoe Van Ceulen de bestuurders van de stad Leiden zeer dankbaar is voor het toegewezen krijgen van een woonplaats voor zijn gezin en een school waar hij zijn beroep mocht uitoefenen. Hiermee verwijst Van Ceulen naar de toewijzing van de Leidse Faliedenbegijnkerk door de bestuurders als locatie voor zijn schermschool. Van Ceulen vraagt zich af hoe hij iets terug kan doen en komt dan op het volgende:

> Omdat ik niets anders voor handen heb en u toch naar mijn uiterste vermogen zou willen bedanken voor de onvergetelijke weldaad die u mij gedaan heeft, heb ik gedurende veel jaren (niet zonder hier veel tijd en werk in te steken) dit tractaat over interest verzameld, welk ik (hoewel uw gunst veel meer verdient) graag [...] in druk zou

> willen uitbrengen onder uw bescherming. [...] Hoeveel het werk wat betreft nuttigheid, gerief en verzekering betekenen zal [...] zullen verstandige mensen naar ik vermoed beter kunnen beoordelen dan het mij betaamt hier op te schrijven: heeft u toch het vertrouwen dat het mettertijd duidelijk zal worden dat dit tractaat uw bescherming [...] niet geheel onwaardig is. [Vrije hertaling]

In eerste instantie is het werk dus bedoeld om de bestuurders van Leiden te danken. Echter, dit verklaart nog niet waarom Van Ceulen hen juist met een werk over interestrekening bedankt. Later echter (folio 77B-78A, voorbeeld 13) beschrijft Van Ceulen een voorval dat hem is overkomen en een duidelijkere motivatie geeft voor het schrijven van een werk over juist dit onderwerp. Er zijn kooplieden, merkt hij op, die met slimme trucs hun schuldenaren meer geld afhandig maken dan nodig is. Ook van Ceulen zelf is wel eens prooi gevallen aan zo'n bedrieger. Gelukkig was hij toen in het gezelschap van een man die zeer bedreven was in de interestrekening, zodat hij de bedrieger de deur kon wijzen. Van Ceulen had hiermee geluk, maar er zijn mensen die minder geluk hebben.

> ...daarom zal ik u nu door het geven van voorbeelden [uit de interestrekening] zoveel bijbrengen, als mij nodig dunkt...

Dit geeft een duidelijke motivatie voor het schrijven van een werk over interestrekening. Toch moet hierbij wel opgemerkt worden dat, zoals ook in de Inleiding te lezen was, Van Ceulen niet de eerste is die een dusdanig werk over interestrekening schreef. Anderen, zoals zijn landgenoot Stevin, gingen hem voor. Het is bekend dat Van Ceulen en Stevin bevriend waren. Het is daarom de vraag waarom Van Ceulen een soortgelijk werk publiceerde. Slechts op één punt in het werk verwijst Van Ceulen naar eerder gedaan werk in de interestrekening (zie folio 95A-95B, voorbeeld 100). Van Ceulen bespreekt dan een probleem dat renterekenaar Martinus Wentsel eerder al formuleerde in zijn "Proportionale Ghesolveerde Tafelen van Interest". Volgens Van Ceulen hebben zowel Wentsel als Valentijn Menher en Michiel Cognet, andere rekenaars, het probleem opgelost maar hebben zij allen rekenfouten gemaakt. De wiskundige Felix van Sambix had door dat het eerdere werk een fout bevatte en gaf de opgave aan Van Ceulen op, die het vervolgens oploste. Het antwoord van Van Ceulen is wel correct, hoewel Wentsel dit nooit toe heeft gegeven. (Waller Zeper, 71-76)

Het zou dus zo kunnen zijn dat Van Ceulen het tot dan toe gepubliceerde werk over interestrekening wilde aanvullen en verbeteren. Echter, hij verwijst alleen naar Valentijn Menher, Michiel Cognet en Felix van Sambix; wat hij vond over het werk van Stevin is niet af te leiden uit dit werk. Een laatste aanvullende motivatie voor het schrijven van het werk zou kunnen zijn dat al het werk dat hierin gestoken werd dertig jaar van Van Ceulens leven beslaat (zie folio 76B, vierde regel van boven).

2.3 Doel van de tekst: 'de Interestrekeninghe' als lesboek

Zoals eerder werd genoemd blijken de voorbeelden van Van Ceulen bedoeld om zijn lezers te scholen in de interestrekening, zodat zij niet bedrogen zullen worden door listige kooplieden. 'De Interestrekeninghe' lijkt daarmee primair een lesboek. De structuur van het werk bevestigt deze aanname. Ten eerste begint 'De Interestrekeninghe' met makkelijke voorbeelden en definities, om vervolgens steeds lastigere voorbeelden te behandelen. Er zit dus een duidelijke leercurve in het boek. Ten tweede zijn de voorbeelden op zich in sommige gevallen ook op te delen in groepjes voorbeelden, die allen dezelfde situatie beschrijven maar waarin steeds een andere waarde moet worden uitgerekend. Dit verduidelijkt de theorie en de berekeningen van het werk en is dus erg inzichtelijk wanneer men voor het eerst met deze stof te maken krijgt. [1] Ten derde zijn de voorbeelden op zich ook opgebouwd om van te leren: steeds staat eerst het probleem vermeld, dan een kort antwoord en vervolgens pas een uitwerking. Dit zou bijvoorbeeld gebruikt kunnen worden als men de opgave eerst zelf probeert: het antwoord is dan kort te controleren zonder de uitwerking te zien.

Toch zijn er ook verschillende onderdelen die Van Ceulen niet of nauwelijks toelicht: de rekenschema's (schema's waarin de berekeningen behorende bij een opgave gedaan worden; te vergelijken met bijvoorbeeld de hedendaagse kruistabel), licht hij op geen enkel moment toe. Ook het oplossen van een kwadratische vergelijking (wat op meerdere plaatsen in het werk moet gebeuren om tot het antwoord te komen) beschouwt hij als triviaal: hij geeft telkens opnieuw alleen het antwoord en niet de uitwerking. Het lijkt erop dat Van Ceulen ervanuit kon gaan dat zijn lezerspubliek deze technieken al onder de knie had.

[1] Zie bijvoorbeeld folio 78B, voorbeeld 4-6.

Hoofdstuk 3

Voorbeelden

'De Interestrekeninghe' heeft dus een duidelijke structuur, die ook voldoet aan het doel van de tekst (als lesboek). In dit hoofdstuk zal dieper worden ingegaan op de hertaalslag die nodig is om deze voorbeelden te interpreteren.

Het werk bestaat in totaal uit 176 voorbeelden. Deze voorbeelden behandelen deels de theorie van simpele interest en voor het andere deel de theorie van samengestelde interest. Hierin worden vragen beantwoord met behulp van rekenschema's en - van tijd tot tijd - het oplossen van een kwadratische vergelijking. Tenslotte worden er ook tabellen gebruikt bij het oplossen van problemen (vanaf folio 96A).

3.1 Veelgebruikte begrippen

'De Interestrekeninghe' door Van Ceulen is gedrukt in 1596. Dit betekent uiteraard dat er een hertaling nodig is om de voorbeelden van Van Ceulen om te zetten in moderne notatie: niet alleen wegens het gebruik van het Vroegnieuwnederlands, maar ook door het gebruik van Cossische notatie[1] en het gebruik van vandaag de dag minder bekende termen en rekenschema's. Hieronder volgt een korte opsomming van de meest noodzakelijke termen.

Definitie 1 Het bedrag dat voor elke 100 pond/gulden/etc. geleend geld na 1 jaar aan de schuldeiser betaald dient te worden heet de *interest*, notatie r pond/gulden/etc.

Definitie 2 Wanneer iemand een lening *tegen penning* n afsluit, betekent dat, dat voor elke n pond geleend geld na een jaar 1 pond betaald dient te worden aan de schuldeiser. Hier geldt dus $r = \frac{100}{n}$. Ludolf van Ceulen zelf spreekt over een lening "tegen den penningh n".

[1] Voorloper van de algebraische notatie; zal verder worden toegelicht elders in scriptie

Definitie 3 Het bedrag dat aan de schuldeiser betaald dient te worden aan het einde van de leentermijn t (in maanden) over een geleend bedrag B heet de winst w.

Voorbeeld Bovenstaande termen staan in de 'Interestrekeninghe' ook gedefinieerd. Een voorbeeld dat gezien kan worden als de introductie van bovenstaande termen is voorbeeld 102 (folio 96B). In vrije hertaling staat daar beschreven:

> Het is bekend dat als iemand tegen een interest van 10, 12, 8 of 9 op 100 leent, of tegen penning 8, 9, 10, 12, 16 leent, dat dit betekent: het aantal keer dat 100 wordt geleend, moet ook 10, 12, 8 of 9 als interest betaald worden. Als ik op interest 300 gulden leen, dan moet ik aan het einde van een jaar (tegen de interest 10 op 100), 30 gulden aan interest betalen. Tegen 12 op 100 moet ik 36 gulden betalen, tegen 8 op 100 moet ik 24 gulden betalen, tegen 9 op 100 moet ik 27 gulden betalen. Dit geldt ook als men 720 gulden tegen interest leent. Dan moet aan het einde van een jaar als interest tegen penning 10, 72 gulden betaald worden, tegen penning 12, 60, tegen penning 8, 90, en tegen penning 9, 80, en tegen penning 16, 45 gulden. Dat betekent, zoveel maal als 16 in het geleende bedrag zit, zoveel maal moet 1 terugbetaald worden als interest. Hieruit volgt: als men 16 gulden leent, dan moet men na een jaar 17 gulden terugbetalen voor het oorspronkelijke bedrag en de interest.

Definitie 4 Wanneer er bij een leentermijn van meer dan één jaar, jaarlijks slechts winst berekend wordt over de hoofdsom (het oorspronkelijk geleende bedrag), en niet over de interest van voorgaande jaren op die hoofdsom, spreken we van *simpele interest.* De winst w is dan gedefinieerd als:

$$w = \frac{t}{12} \cdot \frac{r}{100} \cdot B \tag{3.1}$$

met t de leentermijn in maanden, r de interest en B de hoofdsom.

Wanneer er wel interest over de nog te betalen interest van voorgaande jaren gerekend wordt, spreken we van *samengestelde interest.*

Voorbeeld Als een persoon A voor twee jaar 16 pond tegen penning 16 *simpele interest* leent, dan moet A na twee jaar 18 pond terugbetalen. Als A voor twee jaar 16 pond tegen penning 16 *samengestelde interest* leent, dan moet A na twee jaar $16 \cdot (\frac{17}{16})^2$ terugbetalen.

Daarnaast worden veel van de voorbeelden in het werk uitgedrukt met behulp van inmiddels verouderde symbolen voor valuta. Het betreft hier het oude symbool voor een pond (notatie ℔), die bestond uit 20 schellingen (notatie ß), die elk te verdelen zijn in 12 groten (notatie ꝭ), die elk te verdelen zijn in 24 miten (geen speciale notatie). Verder wordt ook de gulden als valuta gebruikt.

De gulden bestond uit 20 stuivers, die elk te verdelen zijn in 16 penningen. Deze valuta worden niet met een symbool aangegeven. [2]

3.2 Interpretatie

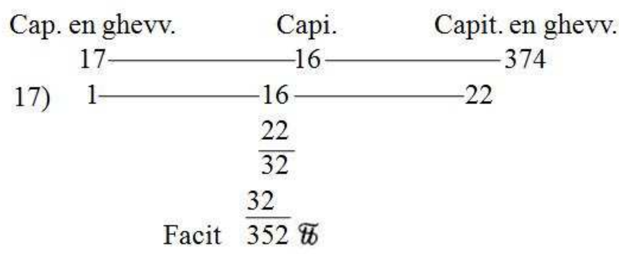
De interpretatie van de methodes die Van Ceulen in zijn werk gebruikt hangt af van de interpretatie van zijn teksten, rekenschema's en tabellen. Voordat meer gezegd kan worden over zijn methode is het dus zinnig eerst te kijken naar een aantal verschillende voorbeelden uit 'de Interestrekeninghe', toegespitst op de manier waarop deze naar moderne notatie kunnen worden omgezet.

3.2.1 Een eenvoudig rekenschema: voorbeeld 2

Veel van de rekenschema's die Van Ceulen gebruikt in het werk zijn terug te brengen tot die uit het volgende eenvoudige voorbeeld (voorbeeld 2, folio 78A-78B).

> Iemand leent een zeker bedrag B tegen penning 16 simpele interest. Na een jaar betaalt hij 374 ℔ voor het geleende bedrag en de interest daarover. *Vraag:* Hoeveel heeft hij oorspronkelijk geleend?

Van Ceulen lost het probleem op met een rekenschema, zie Figuur 3.1.



Figuur 3.1: Rekenschema voorbeeld 2

3.2.2 Hertalen tot moderne notatie: voorbeeld 35

In een groot gedeelte van de voorbeelden van Van Ceulen ligt het probleem niet in het interpreteren van de rekenschema's (aangezien de gebruikte getallen, en dus de bewerkingen in de schema's, met enig begrip van de uitwerking van het probleem duidelijk worden). De moeilijkheid ligt in het geven van een precieze definitie van het probleem. Een goed voorbeeld van deze moeilijkheid is duidelijk in voorbeeld 35 (folio 82B en 83A).

[2] Zie ook Bartjens, 3.

Het probleem wordt door Van Ceulen als volgt gegeven. Om de tekst om te zetten in moderne notatie is elke regel voorzien van een nummer dat verderop verbonden zal worden aan een vergelijking.

> Een Man leendt A ende B tsamen 300 ℔ op ghelijcke Interest (3.2) / ende het werdt bevonden dat de selve Proportie / welcke is tusschen A ende B gheleende geldt / is mede tusschen den tijdt / soo lange elck syn penninghen ghebruycken sal (3.3) / welcke twee tijden tsamen ghedaen doen 15 maenden (3.4). Den Crediteur ontfangt ten eynde syns ghesetten tijts van A voor ghewin (behalven het Capitael) $18\frac{3}{4}$ ℔(3.5/3.7). Van B als syn tijdt omghecomen is / voor gewin 12 ℔(3.6/3.8). *Vraghe:* Hoe veel elck bysonder geleendt heeft / en hoe lange / en op wat Interest?

De hertaling hiervan naar moderne notatie is als volgt. A en B lenen tegen gelijke interest r een bedrag B_a en B_b voor de termijnen t_a en t_b. Aan het einde van deze termijn betalen zij w_a en w_b als interest over het geleende bedrag. Er is gegeven:

$$B_a + B_b = 300 \tag{3.2}$$

$$B_a : B_b = t_a : t_b \tag{3.3}$$

$$t_a + t_b = 15 \tag{3.4}$$

$$w_a = 18\frac{3}{4} \tag{3.5}$$

$$w_b = 12 \tag{3.6}$$

Nu deze hertaling duidelijk is, is het ook duidelijk dat dit probleem een oplossing heeft. Immers, het probleem wordt omschreven door 5 vergelijkingen met 5 onbekenden. Dit is geheel duidelijk wanneer de laatste twee vergelijkingen met behulp van de formule voor de winst (3.1) omgeschreven worden tot

$$\frac{t_a}{12} \cdot \frac{r}{100} \cdot B_a = 18\frac{3}{4} \tag{3.7}$$

$$\frac{t_b}{12} \cdot \frac{r}{100} \cdot B_b = 12 \tag{3.8}$$

Van Ceulen lost het probleem op twee manieren op. Voor de eerste methode gebruikt hij dat de verhouding tussen de geleende bedragen en de termijnen hetzelfde zijn, dus dat

$$\frac{w_a}{w_b} = \frac{B_a}{B_b} \cdot \frac{t_a}{t_b} = (\frac{B_a}{B_b})^2 = (\frac{t_a}{t_b})^2 \tag{3.9}$$

De verhouding tussen de winst is bekend en dus is de verhouding tussen de geleende bedragen (en de termijnen) bekend. Dus kan Van Ceulen met behulp van (3.2) en (3.4) de geleende bedragen en de termijnen uitrekenen. Zo kan hij ook uiteindelijk de interest bepalen.

Voor de tweede methode stelt Van Ceulen het bedrag B_a gelijk aan een onbekende, x. Door dit in te vullen en uit te werken in alle vergelijkingen komt hij uiteindelijk tot een kwadratische vergelijking, $10000x = 1500000 + 6x^2$. Door deze op te lossen komt hij op het eindantwoord. Van Ceulen vermeldt slechts één van de twee oplossingen van de vergelijking; de andere oplossing geeft een negatieve waarde voor het geleende bedrag B_b.

3.2.3 Uitwerkingen interpreteren: voorbeeld 78

Zoals bij voorbeeld 35 al werd opgenoemd ligt de grootste moeilijkheid in veel gevallen in het geven van een precieze definitie van het probleem dat Van Ceulen wil behandelen. Ook voorbeeld 78 (folio 90B) is hiervan een goed voorbeeld. Daarnaast is het een belangijk voorbeeld aangezien het aanleiding geeft tot de interesttabellen die Van Ceulen in het tweede deel van 'de Interestrekeninghe' zal gaan opstellen en gebruiken.

Het probleem wordt door Van Ceulen als volgt gegeven:

> Iemand is 2261 ℔ schuldig, te betalen met 452 ℔ en 4 ß per jaar. *Vraag:* Met hoeveel gereed geld zal hij moeten betalen als men een simpel interest van penning 16 rekent?

Dit probleem dient gelezen te worden als:

> Iemand betaalt gedurende een aantal jaar een lening af met 452 ℔ en 4 ß per jaar. In totaal betaalt hij 2261 ℔. Hoeveel heeft hij oorspronkelijk geleend, als hij tegen penning 16 simpel interest leende?

Het antwoord van Van Ceulen is:

> *Antwoord:* 1914 ℔ 12 ß 11 ₰ $17\frac{3}{5}$ miten.

				℔	ß	₰	miten
17	16	$452\frac{1}{5}$		425	12	0	0
18	16	$452\frac{1}{5}$		401	19	1	8
19	16	$452\frac{1}{5}$	facit	380	16	0	0
20	16	$452\frac{1}{5}$		361	15	2	$9\frac{3}{5}$
21	16	$452\frac{1}{5}$		344	10	8	0
			Summa	1914	12	11	$17\frac{3}{5}$

De hertaling van deze uitwerking is als volgt. We bekijken elke jaarlijkse termijn als de aflossing van een afzonderlijke lening. In totaal zijn dit vijf leningen (immers $\frac{2261}{452\frac{1}{5}} = 5$).

Hoeveel is er oorspronkelijk geleend in elk van deze vijf leningen? Dit berekent Van Ceulen als volgt. Wanneer een persoon na een jaar $452\frac{1}{5}$ ℔ moet betalen, heeft hij oorspronkelijk 425 ℔ , 12 ß geleend. Immers,

$$\frac{16}{17} \cdot 452\frac{1}{5} = 425\frac{12}{20}$$

Dit is dus het bedrag dat geleend is in de eerste van de vijf leningen.

Wanneer een persoon na twee jaar $452\frac{1}{5}$ ℔ moet betalen, heeft hij oorspronkelijk 401 ℔ 19 ß , 1₰ en 8 miten geleend. Immers,

$$\frac{16}{18} \cdot 452\frac{1}{5} = 401\frac{43}{45}$$

Dit is dus het bedrag dat geleend is in de tweede van de vijf leningen. Zo kunnen ook de overige geleende bedragen voor lening drie, vier en vijf worden bepaald.

We kunnen het oorspronkelijk geleende bedrag bij elk van deze vijf leningen dus uitrekenen door de berekening:

$$452\frac{1}{5} \cdot \frac{16}{16+i}$$

met i de termijn van de lening.

Om nu uit te rekenen hoeveel er in dit probleem oorspronkelijk geleend is, hoeven we deze vijf oorspronkelijke bedragen slechts bij elkaar op te tellen. Er volgt dus:

$$H = \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{16}{16+i} \cdot 452\frac{1}{5}\right) = \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{16}{16+i}\right) \cdot 452\frac{1}{5} \tag{3.10}$$

met H het oorspronkelijk geleende bedrag. Hieruit volgt

$$H = 1914 \text{ ℔ } 12 \text{ ß } 11 \text{ ₰ } 17\tfrac{3}{5} \text{ miten.}$$

Aanleiding tot interesttabellen

De haakjes die in (3.10) geplaatst zijn, lijken op het eerste gezicht triviaal maar zijn van groot belang bij het berekenen van het antwoord. Immers, in het eerste geval wordt voor elke termijn afzonderlijk eerst het oorspronkelijk geleende bedrag uitgerekend en vervolgens opgeteld, maar in het tweede geval wordt eerst de som $\sum_{i=1}^{5}(\frac{16}{16+i})$ uitgerekend en vervolgens vermenigvuldigd met de bedragen die de schuldenaar elk jaar leent. Wanneer de eerste methode gebruikt wordt, is geen enkel deel van de berekening op nieuw te gebruiken voor een soortgelijk voorbeeld. Immers, er moet elke keer opnieuw worden uitgerekend wat het oorspronkelijk geleende bedrag is voor elke termijn. Echter, wanneer de tweede methode gebruikt wordt, kan wel een deel van de berekening opnieuw worden gebruikt voor een soortgelijk voorbeeld: de som $\sum_{i=1}^{5}(\frac{16}{16+i})$ is voor elk soortgelijk voorbeeld hetzelfde, alleen de uiteindelijke vermenigvuldiging met de termijn moet opnieuw gedaan worden. Ludolph van Ceulen heeft zich dit ook gerealiseerd en geeft daarom een tabel waarin voor soortgelijke voorbeelden de som $\sum_{i=1}^{n}(\frac{16}{16+i}) \cdot 10^8$ wordt gegeven voor $n = 1, ..., 24$. Hierbij is met 10^8 vermenigvuldigd omdat Van Ceulen de decimale notatie niet kent en wil vermijden elke keer een lange breuk te geven. Meer over de tabellen en de manier waarop ze gemaakt zijn volgt in het volgende hoofdstuk, Tabellen.

Hoofdstuk 4

Tabellen

4.1 Aanleiding tot de tabellen

In 'de Interestrekeninghe' van Ludolf van Ceulen bevat een groot aantal tabellen die gebruikt kunnen worden bij interestberekeningen tegen verschillende rentepercentages. In totaal geeft Van Ceulen een twintigtal tabellen die bepaald zijn voor verschillende rentepercentages: penning 4 tot en met 20 en penning 25, en verder 6 op 100 tot en met 19 op 100. De eerste die hij geeft is de tabel voor penning 16

> om dat die meest in dese Landen ghebruyckt werden / ende mede de eerste is die ick maeckte voor veel Jaren [omdat die het meest in dit land gebruikt wordt en ook de eerste is die ik gemaakt heb]

(Zie folio 97B). Van Ceulen zelf beschrijft hoe hij tot deze tabellen is gekomen aan de hand van de tabel voor penning 16. De tabellen worden geintroduceerd naar aanleiding van de volgende kwestie, voorbeeld 106 van het boek (folio 97B):

> Er moet 2400 gulden terugbetaald worden met 100 gulden per jaar. Hoeveel is dit aan het begin van de lening in contant geld als men penning 16 als interest rekent? Antwoord: 1226 gulden, 11 stuivers en 2 penningen.

En de interpretatie hiervan is:

> Als men 24 jaar lang elk jaar 100 gulden moet betalen, hoeveel moet er dan aan het begin van de 24 jaar tegen penning 16 weggezet worden om deze bedragen jaarlijks te kunnen voldoen?

Dit gaf volgens Van Ceulen om de volgende reden aanleiding tot de interesttabellen:

> Dergelijke vragen [over interestrekening] kunnen beantwoordt worden als de voorgaanden[1], wat veel werk zou kosten. [Dit was ook

[1] Hiermee verwijst Van Ceulen naar eerdere voorbeelden dan voorbeeld 106, waar zeer veel rekenwerk verzet moest worden

mijn manier] tot de zeer ervaren wijlen Ian Musis een [...] intelligente vraag poneerde. [...] Deze vraag kon ik niet zonder de hulp van de hierop volgende tabellen, die mij hielpen de kwestie in een keer op te lossen, beantwoorden. Daarom kan ik naar waarheid zeggen dat ik als eerste door de voorgenoemde kwestie de interesttabellen gevonden heb, die ik hier zal noteren.

4.2 Inhoud van de tabellen

4.2.1 Doel van de tabellen

Hoe de interesttabellen gemaakt zijn wordt duidelijker wanneer we de volgende tekst van Van Ceulen inzien, waarin staat vermeld wat het doel is van de tabellen[2] (zie folio 97B):

> De eerste [kolom] dient om uit te rekenen hoeveel jaarlijkse termijnen bij contante betaling waard zijn. De middelste dient wanneer een bedrag pas over een aantal jaren voldaan moet worden. De derde (meest rechter) dient om te bepalen hoeveel een bepaald bedrag waard is dat een aantal jaren op interest heeft gelegen.

Dit betekent dat de tweede kolom als volgt te gebruiken is: als een persoon over n jaar 1 gulden wil hebben, dan moet hij nu tegen penning 16 het bedrag uit de n^e rij op interest zetten. De derde kolom is als volgt te gebruiken: als een persoon 1 gulden leent voor een termijn van n jaar, dan moet hij aan het einde van de termijn voor winst en geleend bedrag het bedrag uit de n^e rij betalen. De omschrijving van de eerste kolom is niet duidelijk genoeg om direct de methode te beschrijven die gebruikt is voor het bepalen van elk bedrag in die kolom. De tabel zelf geven hier meer inzicht in; in dit document is dit Tabel 4.1. Er dient opgemerkt te worden dat Van Ceulen in zijn tabel voor penning 16 geen breuken geeft, maar alle getallen met 1000000000 vermenigvuldigd heeft.

4.2.2 Moderne notatie

De tweede en derde kolom

Tabel 4.1, gecombineerd met de beschrijving van Van Ceulen, bevestigt de eerdere interpretatie van de achterliggende berekening voor de tweede en derde kolom.

De tweede kolom is in moderne notatie als volgt bepaald[3]:

$$B_n = \frac{10^8}{(\frac{17}{16})^n} \tag{4.1}$$

[2]In het vervolg van deze paragraaf zal uitgegaan worden van de tabel voor penning 16; eenzelfde analyse voor de andere tabellen is te verkrijgen via www.wiskonst.nl/tabellenvanceulen.pdf

[3]Er is wederom rekening gehouden met het feit dat Van Ceulen in zijn tabel voor penning 16 geen breuken geeft, maar alle getallen met 1000000000 vermenigvuldigd heeft. Dit zal in het vervolg steeds gebeuren.

Tabel 4.1: Interesttabel tegen penning 16 zoals gegeven door Ludolf van Ceulen (folio 98A)

1	941.176.471	941.176.471	1.062.500.000
2	1.826.989.620	885.813.149	1.128.906.250
3	2.660.696.113	833.706.493	1.199.462.891
4	3.445.361.048	784.664.935	1.274.429.322
5	4.183.869.222	738.508.174	1.354.081.155
6	4.878.935.738	695.066.517	1.438.711.227
7	5.533.115.989	654.180.251	1.528.630.679
8	6.148.815.048	615.699.060	1.624.170.096
9	6.728.296.516	579.481.468	1.725.680.727
10	7.273.690.839	545.394.323	1.833.535.772
11	7.787.003.143	513.312.304	1.948.131.758
12	8.270.120.605	483.117.463	2.069.889.993
13	8.724.819.393	454.698.789	2.199.258.118
14	9.152.771.193	427.951.801	2.336.711.750
15	9.555.549.358	402.778.166	2.482.756.234
16	9.934.634.690	379.085.333	2.637.928.499
17	10.291.420.885	356.786.196	2.802.799.030
18	10.627.219.656	335.798.772	2.977.973.969
19	10.943.265.559	316.045.903	3.164.097.342
20	11.240.720.526	297.454.968	3.361.853.426
21	11.520.678.142	279.957.617	3.571.969.265
22	11.784.167.663	263.489.522	3.795.217.344
23	12.032.157.800	247.990.138	4.032.418.428
24	12.265.560.282	233.402.483	4.284.444.580
25	12.485.233.207	219.672.924	4.552.222.366
26	12.691.984.195	206.750.987	4.836.736.264
27	12.886.573.360	194.589.164	5.139.032.280
28	13.069.716.104	183.142.743	5.460.221.798
29	13.242.085.745	172.369.641	5.801.485.661
30	13.404.315.995	162.230.250	6.164.078.515
31	13.557.003.289	152.687.294	
32	13.700.708.978	143.705.688	
33	13.835.961.391	135.252.412	
34	13.963.257.780	127.296.388	
35	14.083.066.146	119.808.365	

met B_n het bedrag in rij n.

De formule achter de derde kolom is:

$$B_n = 10^8 \cdot (\frac{17}{16})^n \tag{4.2}$$

met B_n het bedrag in rij n.

De eerste kolom

Om te bepalen hoe de eerste kolom geinterpreteerd moet worden en voorzien moet worden van moderne notatie, biedt de volgende omschrijving door Van Ceulen uitkomst:

> De eerste [kolom] heb ik als volgt gemaakt: deel 1 in 1000000000 delen. Deel dit door 17, u krijgt $58823529\frac{7}{17}$, waarvan ik de breuk laat varen, omdat hij minder is dan $\frac{1}{2}$. (De reden wordt in het 78e voorbeeld gegeven). Het gevonden quotient aftrekken van 1000000000 geeft 941176471. (behorend onder de noemer, zoals boven dus 1 delend). Dit neem ik als het eerste getal voor de eerste en tweede kolom. Bij dit getal tel ik 1000000000 op, ik kom op 1941176471. Dus als iemand 2 schuldig was (bijv 2 gulden, 2 pond, of 2 kronen, etcetera) te betalen over twee jaar, dan is dit $1\frac{941176471}{1000000000}$ waard in gereed geld. Daarom trek ik van 1941176471 de 17e penning af, en deel deze door 1000000000, men krijgt $\frac{1826989620}{1000000000}$ gereed geld voor twee die te betalen zijn met een per jaar. Dit is het tweede getal (in de kolom). Hierbij 1 opgeteld geeft 2826989620. Hiervan de 17e penning afgehaald, geeft 2660696113. Deze rest gedeeld door de noemer geeft $2\frac{660696113}{1000000000}$. Zoveel is 3, te betalen met 1 per jaar, waarvan de eerste termijn verschijnt over 1 jaar, in gereed geld waard. Daarom is 2660696113 het derde getal van de eerste kolom, enzovoorts. Zo ziet u dus dat op deze manier deze kolom oneindig lang te maken is.

De eerste kolom kan bijvoorbeeld als volgt gebruikt worden: als iemand gedurende n jaar elk jaar 1 gulden wil ontvangen uit een spaartegoed (bijvoorbeeld als pensioen), dan dient hij het bedrag in de n^e kolom tegen penning 16 weg te zetten. Elk jaar ontvangt hij over het bedrag in zijn spaartegoed interest tegen penning 16 en elk jaar ontvangt hij 1 gulden. Na n jaar is het geld precies op. Een andere interpretatie is dat een persoon gedurende n jaar elk jaar met 1 gulden een lening zou kunnen aflossen en wil weten wat het bedrag is dat hij kan lenen.

In wiskundige notatie is het bovenstaande verhaal als volgt samen te vatten. Hierbij is B_i voor $i \in 1, 2, 3$ het bedrag in de i^e kolom:

$$B_1 = 1000000000 \cdot \frac{16}{17} = 9441176471 \tag{4.3}$$

$$B_2 = (B_1 + 1000000000) \cdot \frac{16}{17} = 1826989620 \tag{4.4}$$

$$B_3 = (B_2 + 1000000000) \cdot \frac{16}{17} = 2660696113 \tag{4.5}$$

Dit betekent dus dat de recursieve formule voor de eerste kolom is:

$$B_{n+1} = (B_n + 1000000000) \cdot \frac{16}{17} \tag{4.6}$$

of:

$$B_n = (B_{n+1} \cdot \frac{17}{16}) - 1000000000 \tag{4.7}$$

Deze formules geven hetzelfde resultaat; echter, de eerste komt duidelijk overeen met de persoon die elk jaar met 1 gulden een lening aflost, en de tweede komt overeen met de persoon die elk jaar 1 gulden uit zijn spaartegoed ontvangt. De directe formule voor het bedrag in de n^e rij is:

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1000000000}{(\frac{17}{16})^i} \tag{4.8}$$

Dit geeft als de formules voor de eerste, tweede en derde kolom (4.8), (4.1) en (4.2).

4.3 Interpretatie

Nu we de formules voor de tabellen weten is het ook mogelijk geworden om na te gaan, hoe nauwkeurig Ludolph van Ceulen gewerkt heeft. Hiertoe zijn Tabel 4.2 en Tabel 4.3 van belang. Tabel 4.2 is verkregen met een computerberekening door de formules (4.8), (4.1) en (4.2) te gebruiken. Het is hierbij van belang op te merken dat de getallen recursief berekend zijn. In zijn toelichting merkt Van Ceulen op dat de uitkomsten tussentijds worden afgerond op gehele getallen en hier is ook van uitgegaan in de berekening van Tabel 4.2. Tabel 4.3 is de tabel zoals gepubliceerd door Van Ceulen, waarbij de getallen uit deze tabel die niet overeen komen met het resultaat dat volgens de formules juist is, vet zijn afgedrukt.

In deze tabellen zien we dat Van Ceulen op enkele plaatsen een ander bedrag geeft dan de formules voorschrijven. Deze fouten zijn echter klein: ze zijn beperkt tot het laatste paar cijfers van het bedrag. Wanneer we er van uitgaan dat Van Ceulen recursief gewerkt heeft, zijn veel van de vermelde afwijkingen 'doorrekenfouten' - de berekening is goed, maar er is uitgegaan van een verkeerd vorig getal. Wanneer we alleen kijken naar waar Van Ceulen een fout gemaakt heeft en niet naar waar de tabel afwijkt van die voortgebracht door de formules, ziet de tabel met vetgedrukte fouten er anders uit (Tabel 4.4). Er blijken veel minder fouten gemaakt te zijn. Dit bewijst dat Van Ceulen inderdaad alle getallen recursief berekende, zoals hij ook in de tekst aangeeft.

Wat opvalt is dat alle fouten afrondfouten zijn. Wanneer we met behulp van de recursieve formules doorrekenen wijkt het antwoord van Van Ceulen, wanneer het fout is, hoogstens 1 van het juiste antwoord af. Dit is vreemd. Een dusdanig ingewikkelde berekening loopt dan stuk op de laatste, meest eenvoudige stap, waar Van Ceulen moet bedenken of de breuk achter het getal groter of kleiner

Tabel 4.2: Interesttabel tegen penning 16 volgens moderne berekening

1	941.176.471	941.176.471	1.062.500.000
2	1.826.989.619	885.813.149	1.128.906.250
3	2.660.696.112	833.706.493	1.199.462.891
4	3.445.361.047	784.664.935	1.274.429.322
5	4.183.869.221	738.508.174	1.354.081.155
6	4.878.935.737	695.066.517	1.438.711.227
7	5.533.115.988	654.180.251	1.528.630.679
8	6.148.815.048	615.699.060	1.624.170.096
9	6.728.296.516	579.481.468	1.725.680.727
10	7.273.690.839	545.394.323	1.833.535.772
11	7.787.003.143	513.312.304	1.948.131.758
12	8.270.120.605	483.117.463	2.069.889.993
13	8.724.819.393	454.698.789	2.199.258.118
14	9.152.771.193	427.951.801	2.336.711.750
15	9.555.549.358	402.778.166	2.482.756.234
16	9.934.634.690	379.085.333	2.637.928.499
17	10.291.420.885	356.786.196	2.802.799.030
18	10.627.219.656	335.798.773	2.977.973.969
19	10.943.265.559	316.045.904	3.164.097.342
20	11.240.720.526	297.454.968	3.361.853.426
21	11.520.678.142	279.957.617	3.571.969.265
22	11.784.167.663	263.489.522	3.795.217.344
23	12.032.157.800	247.990.138	4.032.418.428
24	12.265.560.282	233.402.483	4.284.444.580
25	12.485.233.207	219.672.925	4.552.222.366
26	12.691.984.195	206.750.988	4.836.736.264
27	12.886.573.360	194.589.165	5.139.032.281
28	13.069.716.104	183.142.744	5.460.221.799
29	13.242.085.745	172.369.641	5.801.485.661
30	13.404.315.995	162.230.250	6.164.078.515
31	13.557.003.289	152.687.294	
32	13.700.708.978	143.705.688	
33	13.835.961.391	135.252.412	
34	13.963.257.780	127.296.388	
35	14.083.066.146	119.808.365	

Tabel 4.3: Interesttabel tegen penning 16 volgens Van Ceulen, met vetgedrukte getallen die afwijken van Tabel 4.2

1	941.176.471	941.176.471	1.062.500.000
2	**1.826.989.620**	885.813.149	1.128.906.250
3	**2.660.696.113**	833.706.493	1.199.462.891
4	**3.445.361.048**	784.664.935	1.274.429.322
5	**4.183.869.222**	738.508.174	1.354.081.155
6	**4.878.935.738**	695.066.517	1.438.711.227
7	**5.533.115.989**	654.180.251	1.528.630.679
8	6.148.815.048	615.699.060	1.624.170.096
9	6.728.296.516	579.481.468	1.725.680.727
10	7.273.690.839	545.394.323	1.833.535.772
11	7.787.003.143	513.312.304	1.948.131.758
12	8.270.120.605	483.117.463	2.069.889.993
13	8.724.819.393	454.698.789	2.199.258.118
14	9.152.771.193	427.951.801	2.336.711.750
15	9.555.549.358	402.778.166	2.482.756.234
16	9.934.634.690	379.085.333	2.637.928.499
17	10.291.420.885	356.786.196	2.802.799.030
18	10.627.219.656	**335.798.772**	2.977.973.969
19	10.943.265.559	**316.045.903**	3.164.097.342
20	11.240.720.526	297.454.968	3.361.853.426
21	11.520.678.142	279.957.617	3.571.969.265
22	11.784.167.663	263.489.522	3.795.217.344
23	12.032.157.800	247.990.138	4.032.418.428
24	12.265.560.282	233.402.483	4.284.444.580
25	12.485.233.207	**219.672.924**	4.552.222.366
26	12.691.984.195	**206.750.987**	4.836.736.264
27	12.886.573.360	**194.589.164**	**5.139.032.280**
28	13.069.716.104	**183.142.743**	**5.460.221.798**
29	13.242.085.745	172.369.641	5.801.485.661
30	13.404.315.995	162.230.250	6.164.078.515
31	13.557.003.289	152.687.294	
32	13.700.708.978	143.705.688	
33	13.835.961.391	135.252.412	
34	13.963.257.780	127.296.388	
35	14.083.066.146	119.808.365	

Tabel 4.4: Interesttabel tegen penning 16 volgens Van Ceulen, met vetgedrukt de getallen waar hij een afrondfout maakte

1	941.176.471	941.176.471	1.062.500.000
2	**1.826.989.620**	885.813.149	1.128.906.250
3	2.660.696.113	833.706.493	1.199.462.891
4	3.445.361.048	784.664.935	1.274.429.322
5	4.183.869.222	738.508.174	1.354.081.155
6	4.878.935.738	695.066.517	1.438.711.227
7	5.533.115.989	654.180.251	1.528.630.679
8	6.148.815.048	615.699.060	1.624.170.096
9	6.728.296.516	579.481.468	1.725.680.727
10	7.273.690.839	545.394.323	1.833.535.772
11	7.787.003.143	513.312.304	1.948.131.758
12	8.270.120.605	483.117.463	2.069.889.993
13	8.724.819.393	454.698.789	2.199.258.118
14	9.152.771.193	427.951.801	2.336.711.750
15	9.555.549.358	402.778.166	2.482.756.234
16	9.934.634.690	379.085.333	2.637.928.499
17	10.291.420.885	356.786.196	2.802.799.030
18	10.627.219.656	**335.798.772**	2.977.973.969
19	10.943.265.559	316.045.903	3.164.097.342
20	11.240.720.526	297.454.968	3.361.853.426
21	11.520.678.142	279.957.617	3.571.969.265
22	11.784.167.663	263.489.522	3.795.217.344
23	12.032.157.800	247.990.138	4.032.418.428
24	12.265.560.282	233.402.483	4.284.444.580
25	12.485.233.207	**219.672.924**	4.552.222.366
26	12.691.984.195	206.750.987	4.836.736.264
27	12.886.573.360	194.589.164	**5.139.032.280**
28	13.069.716.104	183.142.743	5.460.221.798
29	13.242.085.745	**172.369.641**	**5.801.485.661**
30	13.404.315.995	162.230.250	6.164.078.515
31	13.557.003.289	152.687.294	
32	13.700.708.978	143.705.688	
33	13.835.961.391	135.252.412	
34	13.963.257.780	127.296.388	
35	14.083.066.146	119.808.365	

dan $\frac{1}{2}$ is. Het zou nog bedacht kunnen worden dat dit het gevolg is van het weglaten van de breuk in plaats van het getal echt af te ronden, maar dit is niet het geval. Het foutieve getal van Van Ceulen kan namelijk zowel 1 hoger dan het juiste getal zijn als 1 lager. Dit leidt tot de vraag of Van Ceulen zijn getallen wel op een geheel getal afrondde: dit leidt tot allerlei 'slordige' fouten.

Hoe heeft Van Ceulen zijn getallen dan afgerond? Het is ook denkbaar dat hij in plaats van getallen op een geheel getal af te ronden, ze afrondde op bijvoorbeeld één decimaal en deze decimaal vervolgens alleen voor eigen gebruik bewaarde. Dat wil zeggen, hij noteerde de decimaal niet maar rekende er wel mee verder. Als we met behulp van een computerberekening bekijken wat het resultaat van deze methode zou moeten zijn (we laten de computer tussentijds steeds op één decimaal afronden), en dit vergelijken met de getallen die Van Ceulen geeft, leidt dit tot Tabel 4.5. Hierbij zijn weer de getallen die afwijken van hetgeen uit de computerberekeningen volgt vetgedrukt. Opnieuw zijn deze fouten alleen afrondfouten. Het blijkt zelfs dat er meer (afrond)fouten optreden wanneer we uitgaan van afronding op 1 decimaal dan wanneer er op een geheel getal zou zijn afgerond. Hieruit lijkt dus te volgen dat Van Ceulen niet op één decimaal afrondde. Er moet wel worden opgemerkt dat dit niet uit elke tabel die Van Ceulen gemaakt heeft volgt: sommige tabellen bevatten duidelijk minder fouten wanneer we uitgaan van afronding op 1 decimaal. Het is wellicht zo dat Van Ceulen beide methodes gebruikt heeft.

Een laatste opmerking betreft de manier waarop kolom 1 tot stand komt. Uit de formules (4.8) en (4.1) voor de getallen in kolom 1 en 2 volgt dat de getallen uit kolom 1 ook uitgerekend zouden kunnen worden met:

$$B_{1,n} = \sum_{j=1}^{n} B_{2,j} \tag{4.9}$$

waarbij $B_{i,j}$ het j^e getal uit de i^e kolom is (met $B_{2,j}$ volgens (4.1).

Het zou dus zo kunnen zijn dat Van Ceulen de eerste kolom gemaakt heeft na de tweede kolom volgens deze formule. Echter, dit is niet het geval. Immers, als Van Ceulen dit zo berekend zou hebben, zouden fouten in kolom 2 doorwerken op kolom 1. Het is echter bijna altijd het geval dat de fouten uit kolom 1 en 2 niet direct na elkaar plaatsvinden. Tabel 4.6 bevat in de linkerkolom de kolom van Van Ceulen zelf en in de rechter kolom de kolom volgens voorgenoemde formule. Uit het grote verschil tussen beide kolommen blijkt wel dat deze methode niet door Van Ceulen is gebruikt.

4.4 De tabellen in gebruik: voorbeeld 119

4.4.1 Vraagstelling

De tabellen van Van Ceulen zijn bedoeld om het rekenwerk te verlichten bij het beantwoorden van een vraag in de interestrekening. Een voorbeeld van zo'n vraag is voorbeeld 119 (folio 101A-102A). De probleemstelling hier is in vrije hertaling:

Tabel 4.5: Interesttabel voor penning 16 volgens Van Ceulen

1	941.176.471	941.176.471	1.062.500.000
2	**1.826.989.620**	885.813.149	1.128.906.250
3	2.660.696.113	833.706.493	1.199.462.891
4	**3.445.361.048**	784.664.935	**1.274.429.322**
5	4.183.869.222	738.508.174	1.354.081.155
6	4.878.935.738	**695.066.517**	1.438.711.227
7	5.533.115.989	654.180.251	1.528.630.679
8	6.148.815.048	615.699.060	1.624.170.096
9	6.728.296.516	579.481.468	1.725.680.727
10	7.273.690.839	545.394.323	1.833.535.772
11	**7.787.003.143**	513.312.304	1.948.131.758
12	8.270.120.605	483.117.463	2.069.889.993
13	8.724.819.393	**454.698.789**	2.199.258.118
14	**9.152.771.193**	427.951.801	2.336.711.750
15	9.555.549.358	402.778.166	2.482.756.234
16	9.934.634.690	379.085.333	2.637.928.499
17	10.291.420.885	356.786.196	2.802.799.030
18	10.627.219.656	335.798.772	**2.977.973.969**
19	10.943.265.559	316.045.903	3.164.097.342
20	11.240.720.526	297.454.968	3.361.853.426
21	11.520.678.142	279.957.617	3.571.969.265
22	11.784.167.663	263.489.522	3.795.217.344
23	**12.032.157.800**	247.990.138	4.032.418.428
24	12.265.560.282	233.402.483	4.284.444.580
25	12.485.233.207	**219.672.924**	4.552.222.366
26	12.691.984.195	206.750.987	4.836.736.264
27	12.886.573.360	**194.589.164**	**5.139.032.280**
28	**13.069.716.104**	183.142.743	5.460.221.798
29	13.242.085.745	**172.369.641**	**5.801.485.661**
30	13.404.315.995	162.230.250	6.164.078.515
31	13.557.003.290	152.687.295	
32	13.700.708.978	143.705.689	
33	13.835.961.391	135.252.413	
34	13.963.257.780	127.296.389	
35	14.083.066.146	119.808.366	

Tabel 4.6: Interesttabel tegen penning 16 volgens Van Ceulen en volgens formule 4.9

1	941.176.471	941.176.471
2	1.826.989.620	1.826.989.619
3	2.660.696.113	2.660.696.112
4	3.445.361.048	3.445.361.047
5	4.183.869.222	4.183.869.221
6	4.878.935.738	4.878.935.738
7	5.533.115.989	5.533.115.989
8	6.148.815.048	6.148.815.049
9	6.728.296.516	6.728.296.517
10	7.273.690.839	7.273.690.840
11	7.787.003.143	7.787.003.144
12	8.270.120.605	8.270.120.607
13	8.724.819.393	8.724.819.396
14	9.152.771.193	9.152.771.197
15	9.555.549.358	9.555.549.363
16	9.934.634.690	9.934.634.696
17	10.291.420.885	10.291.420.891
18	10.627.219.656	10.627.219.664
19	10.943.265.559	10.943.265.567
20	11.240.720.526	11.240.720.535
21	11.520.678.142	11.520.678.151
22	11.784.167.663	11.784.167.673
23	12.032.157.800	12.032.157.811
24	12.265.560.282	12.265.560.294
25	12.485.233.207	12.485.233.218
26	12.691.984.195	12.691.984.205
27	12.886.573.360	12.886.573.369
28	13.069.716.104	13.069.716.112
29	13.242.085.745	13.242.085.753
30	13.404.315.995	13.404.316.003
31	13.557.003.290	13.557.003.297
32	13.700.708.978	13.700.708.986
33	13.835.961.391	13.835.961.399
34	13.963.257.780	13.963.257.788
35	14.083.066.146	14.083.066.154

Er wordt een lening van een bepaald bedrag B tegen penning 16 afbetaald in jaarlijkse termijnen van 1 gulden per jaar. De eerste termijn verschijnt een jaar nadat de lening is aangegaan. In totaal wordt 150 gulden betaald voor de interest en het oorspronkelijk geleende bedrag B samen (de som van alle termijnen is dus 150 gulden). *Vraag:* Wat is het bedrag B?

4.4.2 Uitwerking

Zoals we hebben gezien in voorbeeld 78 is het mogelijk om de bovenstaande vraag als volgt te beantwoorden: we bekijken opnieuw elke jaarlijkse termijn als de aflossing van een afzonderlijke lening. In totaal zijn dit 150 leningen. We kunnen het oorspronkelijk geleende bedrag bij elk van deze 150 leningen uitrekenen door de berekening:

$$B_i = \frac{1}{(\frac{17}{16})^i}$$

Dus geldt dat het oorspronkelijk geleende bedrag B voor alle termijnen te berekenen is door:

$$\sum_{i=1}^{150} B_i = \sum_{i=1}^{150} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i}$$

Wanneer dit rekenwerk met de hand gedaan wordt, lijken er slechts twee mogelijkheden te zijn: het gebruik van de somformule voor de meetkundige rij, of het uitrekenen van het bedrag B_i voor alle i. Hoewel de eerste mogelijkheid bekend was bij Van Ceulen (uit voorbeeld 97, folio 94A-94B blijkt dat hij de somformule kende) is dit toch niet de manier die hij gebruikt. Het is onbekend waarom. De enige optie lijkt dan nog de tweede methode: het uitrekenen van B_i voor alle i. Gelukkig heeft Van Ceulen een methode die hem veel rekenwerk bespaart.

Tot zijn beschikking staat de tabel voor interestrekening van penning 16 (folio 98A, zie ook Tabel 4.1). Deze tabel bevat $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i}$ voor $n = 1, ..., 30$ (zie ook de directe formule voor de bedragen in kolom 3, (4.2)). Toch hoeft Van Ceulen niet nog 120 recursieve berekeningen uit te voeren. Hij bespaart als volgt rekenwerk:

$$\sum_{i=1}^{150} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i} = \sum_{i=1}^{75} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i} + \sum_{i=76}^{150} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i} \tag{4.10}$$

dus

$$\sum_{i=1}^{150} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i} = \sum_{i=1}^{75} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i} + ((\sum_{i=1}^{75} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i}) \cdot \frac{1}{(\frac{17}{16})^{75}}) \tag{4.11}$$

Echter, de tabel loopt slechts tot $n = 30$. Dus herhaalt Van Ceulen dezelfde ‘truc’:

$$\sum_{i=1}^{76} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i} = \sum_{i=1}^{38} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i} + ((\sum_{i=1}^{38} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i}) \cdot \frac{1}{(\frac{17}{16})^{38}}) \qquad (4.12)$$

en herhaalt deze opnieuw:

$$\sum_{i=1}^{38} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i} = \sum_{i=1}^{19} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i} + ((\sum_{i=1}^{19} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i}) \cdot \frac{1}{(\frac{17}{16})^{19}}) \qquad (4.13)$$

$\sum_{i=1}^{19} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i}$ en $\frac{1}{(\frac{17}{16})^{19}}$ zijn bij Van Ceulen bekend; deze zijn te vinden in kolom 1 en kolom 2 van Tabel 4.1. Dit geeft hem met behulp van (4.13) de gezochte $\sum_{i=1}^{38} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i}$. Met behulp van

$$\frac{1}{(\frac{17}{16})^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i} \qquad (4.14)$$

en

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i} = (\frac{17}{16} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i}) - 1 \qquad (4.15)$$

in combinatie met (4.12) en vervolgens (4.11) uiteindelijk $\sum_{i=1}^{150} \frac{1}{(\frac{17}{16})^i}$ worden bepaald.

In het voorbeeld van Van Ceulen wordt uiteraard niet deze som genoteerd. Van Ceulen zelf lost op wat de contante waarde is van 9000 gulden, die met 60 gulden per jaar in 150 jaar wordt afgelost. Zijn eindantwoord is 959 gulden, 17 stuivers en $13\frac{8}{27}$ penningen.

4.5 De interesttabellen van Simon Stevin

Nog voordat het werk 'de Interestrekeninghe' gepubliceerd werd, verscheen het werk 'Tafelen van Interest, midtsgaders de constructie der selver' (1582) van Simon Stevin. Het bevatte interesttabellen voor penning 15, 16, 17, 18, 19, 21 en 22 en voor interest van 1 op 100 tot en met 16 op 100. De achterliggende formules voor deze tabellen zijn (4.1) en (4.8).

Dit betekent dus dat het werk dat Stevin gedaan heeft in principe hetzelfde is als dat wat Van Ceulen heeft gedaan. Toch zijn er verschillen die duidelijk maken dat de tabellen in 'de Interestrekeninghe' niet klakkeloos gekopiëerd zijn. Ten eerste geven zowel Van Ceulen als Stevin tabellen voor rentepercentages die de ander niet geeft; Van Ceulen vult Stevin aan met tabellen voor penning 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 en 14 en interest van 17 ten 100, 18 ten 100 en 19 ten 100. Stevin geeft tabellen voor penning 21 en 22 en de interest van 1, 2 of 3 op 100. Dit doet Van Ceulen niet. Ten tweede geeft Van Ceulen in elke tabel een 'decimaal' meer. Tenslotte is duidelijk dat de tabellen van Van Ceulen zijn eigen werk zijn doordat de getallen in de kolommen in geen enkel geval precies overeenkomen met die van Stevin. Tot slot geeft Van Ceulen ook een kolom voor (4.2) voor elke waarde van interest, iets wat Stevin niet doet. In zekere zin is het werk van Van Ceulen dus vollediger dan dat van Stevin.

Hoofdstuk 5

De voorplaat van 'Vanden Cirkel'

5.1 Het probleem van de voorplaat

Niet alleen de bijlage van 'Vanden cirkel' gaat over interestrekening. Ook de voorplaat van 'Vanden cirkel' zelf bevat een probleem uit de interestrekening. Het probleem is interessant omdat het aanleiding geeft tot een, vergeleken met de stof uit 'de Interestrekeninghe', lastige berekening.

Het probleem is te vinden onder de afbeelding van Van Ceulen zelf:

> Een leent 7 ander $1000f$ op gelijcke interest ten 100 int iaer A ghebruickt zijn deel 12 B 10 C 9 D 8 E 6 F 5 G 3 maent betaelt elck ten einde zijns tijts voor geleent gelt ende gewin A 300 B 280 C 260 D 256 E 244 F 240 G $220f$ vrage na het geleent gelt van elck ende na den interest ten 100 int iaer.

Op zichzelf staand is dit probleem niet eenvoudig te hertalen, maar met behulp van een aantal van de voorbeelden uit de 'Interestrekeninghe' is het mogelijk om een consistente hertaling te maken.

5.1.1 De gebruikte notatie

Niet alleen de methode van interestrekening is belangrijk bij het hertalen en oplossen van de voorplaat, ook de notatie die van Ceulen gebruikt is van groot belang. Zo volgt uit verschillende voorbeelden in van Ceulens 'Interestrekeninghe' wat hij bedoelt met de hoofdletters A,B,C tot en met F in het probleem (zie onder andere voorbeeld 8, folio 79A). Dit zijn personen. Met deze gedachte in het achterhoofd wordt de hertaling duidelijk.

5.1.2 Hertaling van het probleem

De hertaling is als volgt:

> Iemand leent zeven anderen in totaal $1000 f$ tegen hetzelfde jaarlijkse rentepercentage. Persoon A leent zijn deel 12 maanden, B zijn deel 10, C 9, D 8, E 6, F 5 en G 3. Aan het einde van deze periodes moeten ze het gehele bedrag en de interest terugbetalen. A betaalt dan 300 f, B 280 f, C 260 f, D 256 f, E 244 f, F 240 f en G 220 f. Hoeveel hebben zij elk geleend en wat is het rentepercentage?

De methode die gebruikt is om tot deze hertaling te komen is als volgt. Ten eerste is het duidelijk dat er aan zeven personen een bedrag geleend wordt doordat G de zevende letter van het alfabet is. Ten tweede is het duidelijk dat de som van de geleende bedragen $1000 f$ is (in plaats van $1000 f$ per persoon), doordat elk persoon minder dan $1000 f$ terugbetaalt voor de interest en het geleende bedrag samen. Uit deze hertaling wordt ook direct duidelijk dat het nodig is om uit te werken wat de methode van interestrekening van van Ceulen is in het geval iemand slechts een gedeelte van een jaar geld leent. Dat dit niet overeenkomt met hedendaagse methoden volgt uit voorbeelden in de 'Interestrekeninghe'.

5.1.3 De gebruikte methode van interestrekening

Uit verscheidene van van Ceulens eerste voorbeelden uit de 'Interestrekeninghe' blijkt dat hij, in het geval van een lening voor een gedeelte van een jaar tegen een jaarlijkse rente, gebruik maakte van een lineaire methode in plaats van de vandaag de dag gebruikelijke exponentiële methode: het probleem moet worden gezien als een probleem in de simpele interest. Een van de voorbeelden uit de 'Interestrekeninghe' waaruit dit duidelijk volgt is het volgende (zie folio 78B, voorbeeld 5):

> Vraag: Hoe lang moet men 504 $\mathfrak{lb}$ [1] wegzetten tegen penning 14, dat wil zeggen tegen een rentepercentage van $7\frac{1}{7}$ procent, om 21 $\mathfrak{lb}$ te verdienen? Antwoord: 7 maanden. Berekening: Deel 504 door 14, dit geeft 36. Zoveel zou men met het weggezette bedrag verdienen in 12 maanden. Daarom, als men 36 verdient in 12 maanden, in hoeveel maanden verdient men dan 21? We berekenen dit als volgt: na 12 maanden heeft men 36 $\mathfrak{lb}$ winst, dus heeft men na 1 maand 3 $\mathfrak{lb}$ winst. 21 gedeeld door 3 geeft 7. Dus moet het geld 7 maanden weggezet worden.

Uit dit voorbeeld wordt duidelijk dat van Ceulen gebruik maakte van een lineaire methode. Dit betekent dat interest bij lenen gedurende een gedeelte van een jaar bepaald wordt door het aantal maanden m dat de lening duurt te delen door 12 en te vermenigvuldigen met de eigenlijke jaarlijkse interest. Het rentepercentage wordt dus niet tot de macht $\frac{m}{12}$ verheven. Deze laatste ontdekking maakt de vraag die van Ceulen op de voorplaat zet geheel duidelijk.

[1] Het teken voor de munteenheid pond in die tijd.

5.2 Oplossing

Nu de hertaling bekend is, is het mogelijk om de oplossing van het probleem te vinden. Daartoe volgt een omzetting van het probleem naar wiskundige notatie.

Zij B_i met $i \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$ het geleende bedrag van persoon i en zij R_i het terug te betalen bedrag van persoon i, inclusief de interest. Zij t_i de termijn gedurende welke persoon i het bedrag leent. Zij verder r de interest, zodanig dat voor elke 100 f geleend geld $100 + r$ na een jaar moet worden terugbetaald. Er geldt dan

$$\sum_{i=A}^{F} B_i = 1000$$

en

$$\forall i \in \{A, B, C, D, E, F, G\} : \frac{100 + (r \cdot \frac{t_i}{12})}{100} \cdot B_i = R_i$$

Om tot het antwoord op het probleem te komen (bestaande uit r en de B_i's) moet dus het bovenstaande stelsel vergelijkingen worden opgelost. Hieruit is een eenduidige oplossing mogelijk. Het geeft aanleiding tot de volgende vergelijking in r:

$$\frac{100}{100 + \frac{r}{12} \cdot 12} \cdot 300 + \frac{100}{100 + \frac{r}{12} \cdot 10} \cdot 280 + \frac{100}{100 + \frac{r}{12} \cdot 9} \cdot 260 + \frac{100}{100 + \frac{r}{12} \cdot 8} \cdot 256 + \frac{100}{100 + \frac{r}{12} \cdot 6} \cdot 244 + \frac{100}{100 + \frac{r}{12} \cdot 5} \cdot 240 + \frac{100}{100 + \frac{r}{12} \cdot 3} \cdot 220 = 1000$$

wat te vereenvoudigen is tot

$$-200 \cdot (-552960000000000000 - 1629388800000000 \cdot r - 15238656000000 \cdot r^2 - 5334720000 \cdot r^3 + 815517600 \cdot r^4 + 5588980 \cdot r^5 + 15184 \cdot r^6 + 15 \cdot r^7) = 0$$

Dit betekent dat er een zevendegraads vergelijking moet worden opgelost om het probleem op te lossen.

5.2.1 Een hedendaagse benadering

Met behulp van een computerprogramma als Matlab is de oplossing van bovenstaand stelsel vergelijkingen te benaderen. De resultaten hieronder volgen na het gebruik van de solve-functie. Hieruit komen zeven mogelijke oplossingen voor r, afgerond op drie decimalen[2]:

```
r =
  130.984...
  -106.199...
 -362.622...
 -225.167...
```

[2]Matlab zelf geeft het resultaat in 29 decimalen

```
 -180.731...
  -142.566...
  -125.965...
```

Echter, alleen de eerste oplossing is van toepassing op de situatie, aangezien het rentepercentage niet negatief kan zijn. Wel moet opgemerkt worden dat deze oplossing een erg hoge interest voorschrijft: wanneer men de definitie van r in herinnering roept volgt dat voor elke 100 f geleend geld na een jaar 130 f interest betaald dient te worden. Dit betekent dat het terug te betalen bedrag meer dan het dubbele is van het oorspronkelijke bedrag. Het probleem van de voorplaat is dus naar alle waarschijnlijkheid geen probleem uit de praktijk maar een manier voor van Ceulen om te laten zien hoe goed hij is in interestrekening. De uiteindelijke oplossing wordt:

```
r =  130.985...
a =  129.879...
b =  133.873...
c =  131.155...
d =  136.662...
e =  147.439...
f =  155.262...
g =  165.730...
```

5.2.2 De methode van Van Ceulen?

De gevonden numerieke oplossingen zijn niet eenvoudig - ze zijn niet te schrijven als een breuk. Aangezien in de 'Interestrekeninghe' geen zevendegraads vergelijkingen worden opgelost, is het nog maar de vraag of Van Ceulen dit wel gedaan heeft voor het probleem op de voorzijde. Is er een andere manier om het probleem te formuleren en vervolgens op te lossen?

Zeker. Het is mogelijk dat Van Ceulen begonnen is met de waarden voor r en de B_i's. Immers, het bepalen van de te betalen bedragen met behulp van deze waarden is zeer eenvoudig. Aangezien Van Ceulen in heel 'de Interestrekeninhge' slechts met breuken werkt, is het dan wel het meest waarschijnlijk dat hij ook met rationale waarden begonnen is. Is het mogelijk dat Van Ceulen hierdoor alsnog bij benadering tot het goede antwoord is gekomen?

Ja: er bestaan verschillende rationale benadering van r die een bij benadering correct antwoord geven. Wanneer we bijvoorbeeld r benaderen met $130\frac{64}{65}$ krijgen we:

```
r = 130 64/65
a = 100/(100+(r/12)*12))*300 = 129 29/33
b = (100/(100+(r/12)*10))*280 = 133 1091/1250
c = (100/(100+(r/12)*9))*260 =  131 97/625
d = (100/(100+(r/12)*8))*256 =  136 6623/10000
e = (100/(100+(r/12)*6))*244 = 147 4389/10000
f = (100/(100+(r/12)*5))*240 = 155 21/80
```

```
g = (100/(100+(r/12)*3))*220 = 165 7299/10000
```

waardoor

```
a+b+c+d+e+f+g = 1000 4/10000
```

wat dicht bij de oorspronkelijke randvoorwaarde komt. Is dit ook dicht genoeg om Van Ceulen 1000 gulden als som van de geleende bedragen te laten geven? Ja: immers, $\frac{4}{10000}$gulden= $\frac{8}{1000}$stuivers= $\frac{128}{1000}$penningen. Dit is een dusdanig kleine fractie van een penning dat Van Ceulen - zoals hij dat ook elders in 'de Interestrekeninghe' doet - dit naar beneden zou afronden.

We zien dus dat het zeer goed mogelijk is dat Van Ceulen met rationale waarden voor de B_i's en r heeft gewerkt om tot de randvoorwaarden van het probleem, zoals geformuleerd op de voorplaat, te komen. Uit het bovenstaande wordt duidelijk dat er ten minste één set beginwaarden die in afronding tot de randvoorwaarden van het probleem leidt. Uiteraard hoeven deze beginwaarden niet die van Van Ceulen te zijn; er zijn meer rationale benaderingen die in afronding tot een goed antwoord leiden. Welke beginwaarden Van Ceulen precies heeft gebruikt, is niet te reconstrueren. We kunnen uit het bovenstaande wel concluderen dat het waarschijnlijker is dat hij deze methode heeft gebruikt, dan dat hij een zevendegraadsvergelijking heeft opgelost. Hij laat immers nergens in 'de Interestrekeninghe' zien dat hij in staat is om zo'n vergelijking op te lossen.

Hoofdstuk 6

Conclusie

Nu bekend is wat er precies te vinden is in ‘de Interestrekeninghe’ van Ludolph van Ceulen zijn er een aantal vragen die beantwoord kunnen worden.

6.1 Wat betekende dit werk voor de interestrekening?

De theorie die in ‘de Interestrekeninghe’ behandelt wordt bestond al eeuwen voor publicatie. Bekende wiskundigen zoals Fibonacci, maar ook Simon Stevin, hadden hun steentje bijgedragen aan de beschrijving van deze theorie. Ludolph van Ceulen schreef zijn werk na hen. Wat heeft hij gedaan, dat voorgangers van hem niet deden?

Zoals al vermeld werd in het hoofdstuk Structuur verwijst Van Ceulen in ‘de Interestrekeninghe’ nauwelijks naar het werk van anderen en wanneer hij dat wel doet, impliceert hij dat zijn werk een verbetering is van eerder werk van anderen. De trots van zijn werk, de uitgebreide interesttabellen die hij geeft voor berekeningen in de samengestelde interest, is inderdaad een verbetering van voorgaand werk. Hoewel er al eerder tabellen van deze soort waren opgezet, bijvoorbeeld door Simon Stevin, zijn er toch verschillen. Het nieuwe aan de tabellen van Van Ceulen vergeleken met die van Stevin is dat Van Ceulen meer tabellen geeft en met een grotere nauwkeurigheid (één ‘decimaal’ meer). Het overige werk van Van Ceulen in ‘de Interestrekeninghe’, de voorbeelden die hij uitwerkt, zijn minder indrukwekkend. Echter, aangezien ‘de Interestrekeninghe’ primair een lesboek is hoeft dit niet negatief opgevat te worden.

6.2 Hoe nauwkeurig is het werk?

De voorbeelden die Van Ceulen uitwerkt bevatten geen grote fouten. De tabellen zijn grotendeels correct. Slechts in een aantal gevallen wijkt het door Van Ceulen gegeven getal in de laatste decimalen af van het juiste getal. Dit is naar alle waarschijnlijkheid het gevolg van afrondfouten waarmee doorgerekend is. Ook bevatten de tabellen hier en daar drukfouten. In de praktijk zullen deze fouten weinig gevolgen hebben gehad.

6.3 Slaagt het in zijn doel?

Het doel van 'de Interestrekeninghe' was, zoals in het hoofdstuk Structuur al werd opgemerkt, in de eerste plaats om de bestuurders van de stad Leiden te danken en in de tweede plaats om de lezers genoeg van de theorie van interestrekening bij te brengen om niet bedrogen te worden bij het afsluiten van een lening. Het eerste doel zouden we als vervuld kunnen zien: in 1599 werd Van Ceulen door de stad Leiden gevraagd om deel te nemen aan een commissie die zich bezig hield met interestrekening. Het werk van Van Ceulen moet dus niet onopgemerkt zijn gebleven bij de stadsbestuurders. Van Ceulen en de andere deelnemers aan deze commissie - Jan van Hout, Simon Franszoon van Merwen, Jan Pieterszoon Dou en Matthijs Mintens - waren volgens het rapport van de commissie ervaren rekenaars. De commissie moest er zorg voor dragen dat interestberekeningen in heel de Staten van Holland en West-Friesland op dezelfde manier werden uitgevoerd. De taak van de commissie was specifiek het maken van een leidraad hoe berekeningen van de nieuw geïntroduceerde belasting moesten worden uitgevoerd. Uiteindelijk zou de commissie de methode van Van Ceulen om rente over perioden van kleiner dan een jaar te bepalen overnemen. (Waller Zeper, 82-84)

Of het tweede doel, 'de Interestrekeninghe' als lesboek, bereikt is, is niet bekend - hoeveel mensen het boek gelezen hebben en wat hun voortgang nadien was is nergens beschreven. Echter, het werk zelf heeft duidelijk de structuur van een lesboek en zal zo ook zeker gebruikt kunnen zijn. De leercurve in het werk maakt het mogelijk om 'de Interestrekeninghe', zelfs ruim vier eeuwen na dato, te lezen en iets wijzer te worden over de interestrekening uit het einde van de zestiende eeuw.

Hoofdstuk 7

Bibliografie

- 1596, Van Ceulen, L. Vanden circkel. *Daerin gheleert werdt te vinden de naeste proportie des circkels-diameter tegen synen omloop : noch de tafelen sinuum, tangentium ende secantium : ten laetsten van interest...* Delft : J. Andriesz. Digitale editie opgevraagd van het Göttinger Digitalisierungszentrum, http://gdz.sub.uni-goettingen.de/gdz/, op 24 februari 2009. Zie http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=313747.

- 1779, Bartjens, W. De Vernieuwde Cyfferinge. Amsterdam: Kannewet, J. Digitale editie opgevraagd van books.google.nl op 4 juni 2009. Zie http://books.google.nl/books?id=JyAAAAAAMAAJ. Gedigitaliseerd op 7 juni 2006.

- Verder ook *De ruzies van van Ceulen - Biografieën - Ludolph van Ceulen (1540- 1610)*, pagina opgevraagd van www.wiskonst.nl op 27 mei 2009. Zie http://www.wiskonst.nl/achtergronden.html.

- 1934, Sarton, G., *Simon Stevin of Bruges (1548-1620)*, Isis, vol.21, no. 2, pp. 241-303. Chicago: The University of Chicago Press, namens The History of Science Society.

- 1937, Waller Zeper, C.M., De oudste interesttafels in Italië, Frankrijk en Nederland: met een herdruk van Stevins "Tafelen van Interest" / Door Cornelis Marius Waller Zeper. Amsterdam: Noord-Hollandsche Uitgeversmaatschappij.

- 1958, Stevin, S., *Tafelen van Interest, midtsgaders de constructie der selver.* In: Simon Stevin, [II A] The Principal Works of Simon Stevin, Mathematics, Vol. II A, Committee of Dutch scientists, Struik, D.J (eds). Amsterdam.

- 1980, Tropfke, J. *Arithmetik und Algebra.* Band 1 van Geschichte der Elementarmathematik. 4e druk. Berlin-New York: De Gruyter.

Verder is aanvullende informatie over de tabellen van Van Ceulen te vinden op www.wiskonst.nl/tabellenvanceulen.pdf (tevens geschreven door de auteur van deze scriptie).

Hoofdstuk 8

Appendix

8.1 Hertaling

Hieronder volgt een hertaling van het titelblad en de inleiding van 'de Interestrekeninghe'. Het boek is geschreven in de periode van het Vroegnieuwnederlands (Vnnl.), welke tussen 1500 en 1700 liep (Zie Mooijaart & van der Wal, 2008 [1]). Voor de hertaling is verder gebruik gemaakt van het Woordenboek der Nederlandsche Taal.

8.1.1 Titelblad

Interestrekening

Op welke manier daarmee wordt gehandeld onder veel voorkomende voorwaarden, te weten: geld voor een bepaalde tijd op interest uitzetten, of tegen rente wegzetten; geld dat over een bepaalde tijd betaald moet worden al onmiddellijk na de koop betalen; naar simpele, hetzij samengestelde interest; met veel andere wiskundige berekeningen.

Ook met allerlei voorbereide tabellen waarmee men direct de betaling van een huis of acten die verplichten tot betalen aflossen kan.

Direct geld voor een bepaalde tijd op interest uit te zetten en weer jaarlijks uit het kapitaal en de winst een zekere som ontvangen ter voldoening van het geleende geld; of een huis, stuk land, of ander goed, welk een zekere direct te betalen som kost, te verkopen voor een deel contant te betalen en de rest te ontvangen in gelijke jaarlijkse termijnen daar op volgend, zodat als men de termijnen reduceert tot direct te betalen geld (naar zoveel rente als de koper beloofd heeft) en daar het geld optelt, zoveel als de koper contant betaalt, dat de som dan overeenkomt met de directe waarde van het huis of het land; etc. Met nog andere tabellen nodig bij verschillende voorbeelden.

[1](2008) Mooijaart, M. & van der Wal, M., Nederlands van Middeleeuwen tot Gouden Eeuw, Cursus Middelnederlands en Vroegnieuwnederlands. Nijmegen: Uitgeverij Vantilt.

Ook het maken en gebruik van de rentetabellen; verder de uitwerking van de meest noodzakelijke voorbeelden met een onderzoek naar de juistheid van de berekeningen.

Tot slot verscheidene wiskundige vragen met de antwoorden erbij, waarvan het onmogelijk werd geacht die op te lossen.

Alles door Ludolf van Ceulen, geboren in Hildesheim Geschreven en in druk gebracht te Delft Gedrukt door Jan Andriesz, boekverkooper, wonend aan het Meerveld in het Gulden ABC Anno 1596

8.1.2 Inleiding

Edelachtbare, wijze, zeer bedachtzame heren, schout, burgemeesters, en regeerders van de stad Leiden

Alhoewel (edelachtbare, wijze, zeer bedachtzame heren) alle onderdanen haar stadsregering en overheid op bevel van God eer, liefde, reverentie en gewillige onderdanigheid moeten bewijzen, acht ik mij toch in deze stad in het bijzonder de bovengenoemden onderdanigheid verplicht boven alle andere burgers en inwoners.

Want (e. wijze, zeer b. heren), ter overdenking van sommige van mijn goede heren en vrienden, realiseer ik mij dat ik mij, ook in het aanzien van mijn eigen burgerlijke staat (sinds kort met echtgenote, kinderen, en een geheel huishouden) binnen uw stad begeven heb, terwijl ik nooit onder uw E. heilzame regering geleefd heb, noch ooit de goede genegenheid daarvan in het ontvangen en onthalen van vreemdelingen meegemaakt heb, en dat uwe E.W. mij toch (ver boven mijn hoop) met buitengewone vriendschap hebben ontvangen, maar ook op mijn verzoek met welwillendheid een fraaie school hebben toegewezen.

Ja, zo fraai en welgelegen, dat ik mij, indien zoiets naar uw believen, E.W., zou mogen gebeuren, de rest van mijn leven onder de regering van u E.W., ten dienste van eenieder, die dat begeert, in mijn beroep graag ter beschikking zou stellen.

Nu weet ik zeer goed dat een dergelijk voorrecht en een dergelijke weldaad die u, E.W., mij (hoewel onverdiend) zeer gunstig bewezen hebt, onder andere mijn grote dankbaarheid vereist. Mijn sobere middelen in acht nemend, en mijzelf metend met mijn eigen maat, en daarbij overleggend wat deze zaak wel zou eisen, aldus bedacht ik mij, dat ik op de een of andere manier deze weldaad zou kunnen inlossen, naar dezelfde goede gewoonte, voor uw goedwillendheid. Niettemin, aangezien ik niets anders voor handen heb, en nochtans naar mijn uiterste vermogen eenieder graag zou laten zien, dat ik uw weldaad geenzins vergeten ben, heb ik gedurende veel jaren (niet zonder veel werk en tijd) dit tractaat van interest samengesteld, hetgeen (alhoewel de waardigheid, en de door uw E.W. aan mij bewezen gunst meer waard is), ik liefhebbend en behoevend onder uw E.W. bescherming wil meedelen, en in druk doen uitgaan.

Zoveel het werk betekent, en hoeveel nuttigheid, gerief, en zekerheid iedereen (daar mee omgaand) daaruit zal kunnen krijgen, zullen de verstandige (naar ik vermoed) beter zelf kunnen beoordelen, dan ik kan opschrijven: ik heb nochtans het vertrouwen, dat mettertijd begrepen zal worden dat dit tractaat de bescherming van uw E.W. niet geheel onwaardig is.

Daarom vraag ik u onderdanig, dit van mij, als uw E.W. onderdanige, schuldige, en geheel goedwillende dienaar, in teken van dankbaarheid, te willen aannemen, en voor de Zoïlus[2] beschermen.

Als het gebeurt dat ik u E.W. enigszins zal kunnen behagen, als dat in mijn macht is, zal ik met veel, vurige ijver uw wensen volbrengen. U.E.W. (mij eerst uw goede gratie aanbevelend) hier mee aan de Almachtige in gelukzalige regering en welvaart bevelende.

Leiden, 20 september, anno 1596. Uw E.W. onderdanige dienaar, en gehoorzame onderdaan Ludolf van Ceulen.

[2]Schimpnaam voor critici